풀이

STEP III 1997, 문제 4

순수수학 • 산술-기하 평균 부등식

> **STEP III 1997, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q4

핵심 아이디어

인쇄된 문제에는 오식이 있다. 근이 네 개인 다항식은 4차식이어야 하고, 계수의 패턴 $1, 4, 6, 4, 1$을 보면 의도한 다항식이

$$\mathrm{f}(x) = x^4 - 4ax^3 + 6b^2x^2 - 4c^3x + d^4.$$

임을 알 수 있다. 계수는 a, b^2, c^3, d^4가 각각 **평균**이 되도록 정해져 있다. 즉 차례대로 근들의 평균, 두 근끼리의 곱들의 평균, 세 근끼리의 곱들의 평균, 네 근 모두의 곱의 평균이다. 그러면 각 부등식은 f, f′ 또는 f″의 근에 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 적용하여 얻어지고, 롤의 정리(Rolle's theorem)는 그 근들이 여전히 서로 다른 양수임을 보장해 준다.

풀이

$\mathrm{f}(x) = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$로 쓰자. 계수를 비교하면

$$p+q+r+s = 4a, \qquad pq+pr+ps+qr+qs+rs = 6b^2,$$
$$pqr+qrs+rsp+spq = 4c^3, \qquad pqrs = d^4.$$

소문항 (i)

$P = pqrs = d^4$라 하자. 어떤 근도 0이 아니므로

$$pqr = \frac{P}{s}, \quad qrs = \frac{P}{p}, \quad rsp = \frac{P}{q}, \quad spq = \frac{P}{r}.$$

사상 $t \mapsto P/t$는 양의 실수에서 일대일(one-to-one)이고 p, q, r, s는 서로 다르므로, 네 곱은 서로 다르다.

소문항 (ii)

세 근끼리의 곱 네 개는 서로 다른 양수이므로, 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$c^3 = \frac{pqr + qrs + rsp + spq}{4} > (pqr \cdot qrs \cdot rsp \cdot spq)^{1/4} = ((pqrs)^3)^{1/4} = (d^4)^{3/4} = d^3.$$

각 근은 네 곱 가운데 정확히 세 개에 나타나므로, 그 곱이 $(pqrs)^3$이 된다. $c, d > 0$이고 $t \mapsto t^3$은 증가함수이므로, $c^3 > d^3$에서 $c > d$를 얻는다.

소문항 (iii)

$0 < p < q < r < s$가 되도록 근에 이름을 붙이자. 다항식 f는 미분가능하고 p와 q에서 값이 0이므로, 롤의 정리에 의해 f′는 $p < \alpha < q$인 근 α를 가진다. 마찬가지로 근 $\beta \in (q, r)$와 $\gamma \in (r, s)$가 존재한다. 이 열린구간들은 겹치지 않으므로 $\alpha < \beta < \gamma$는 서로 다르다. f′는 3차식이므로 다른 근은 없다. 또한 $\alpha > p > 0$이므로 세 근은 모두 양수임에 유의하자.

소문항 (iv)

미분하면

$$\mathrm{f}'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 12b^2x - 4c^3 = 4(x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3),$$

이므로 α, β, γ는 $x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3$의 근이고,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3a, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b^2, \qquad \alpha\beta\gamma = c^3.$$

이것은 차수가 하나 낮아진 같은 패턴이므로, 소문항 (i)과 (ii)를 그대로 따라 하면 된다. 두 근끼리의 곱은 $\alpha\beta = c^3/\gamma$, $\beta\gamma = c^3/\alpha$, $\gamma\alpha = c^3/\beta$이고, α, β, γ가 서로 다른 양수이므로 이들은 서로 다르다. 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$b^2 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{3} > ((\alpha\beta\gamma)^2)^{1/3} = c^2,$$

이고, $b, c > 0$이므로 $b > c$를 얻는다.

생각해 보기 f′에 산술-기하 평균 부등식을 쓰기 전에 왜 소문항 (iii)이 필요할까?

산술-기하 평균 부등식은 양의 실수에만 적용되고, 여기서는 등호가 없는 엄격한 형태가 필요하다. 3차식이 반드시 세 실근을 가지는 것도 아니다. α, β, γ가 서로 다른 양의 실수이고, 따라서 두 근끼리의 곱들도 그렇다는 것을 보장해 주는 것이 바로 롤의 정리이다.

소문항 (v)

같은 논증을 한 번 더 적용한다. f′는 서로 다른 근 $\alpha < \beta < \gamma$를 가지므로, 롤의 정리에 의해

$$\mathrm{f}''(x) = 12x^2 - 24ax + 12b^2 = 12(x^2 - 2ax + b^2),$$

의 근 $\mu \in (\alpha, \beta)$와 $\nu \in (\beta, \gamma)$가 존재하고, 이들은 서로 다른 양수이다. 따라서 $\mu + \nu = 2a$, $\mu\nu = b^2$이고, 두 수에 대한 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$a = \frac{\mu + \nu}{2} > \sqrt{\mu\nu} = b.$$

(같은 말로, $x^2 - 2ax + b^2$는 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식(discriminant) $4a^2 - 4b^2$이 양수이고, 두 수가 모두 양수이므로 $a > b$이다.) 이로써 모두 합쳐

$$a > b > c > d.$$

임을 보였다.

검산

- 근이 $1, 2, 3, 4$인 경우: $4a = 10$, $6b^2 = 35$, $4c^3 = 50$, $d^4 = 24$이므로 $a = 2.5$, $b \approx 2.415$, $c \approx 2.321$, $d \approx 2.213$이 되어 순서가 맞다.
- 네 근이 모두 k로 같다면 $\mathrm{f}(x) = (x - k)^4$이고 $a = b = c = d = k$이다. 엄격한 부등식을 얻으려면 근이 서로 달라야 하는 이유가 이것이다.
- 거의 일치하는 경우를 포함하여 서로 다른 양의 근 네 개로 이루어진 무작위 집합 20 000개를 시험해 보았고, 매번 $a > b > c > d$가 성립하였다.

흔한 실수

- f의 근에 산술-기하 평균 부등식을 바로 적용하는 것. 그러면 $a > d$는 얻지만 가운데 항들은 구분할 수 없다.
- 산술-기하 평균 부등식에 넣는 수들이 서로 다른 양수인지 확인하는 것을 잊는 것. 바로 이것이 소문항 (i)과 (iii)의 핵심이다.
- 모든 문자가 양수라는 점을 언급하지 않고 $c^3 > d^3$ 또는 $b^2 > c^2$에서 $c > d$ 또는 $b > c$로 넘어가는 것.

STEP 너머

양 a, b, c, d는 근들의 **대칭 평균**(symmetric means)이고, 부등식 사슬 $a > b > c > d$는 **매클로린 부등식**(Maclaurin's inequality)의 특수한 경우이다. 즉 양의 실수에 대하여, k개씩의 곱들의 평균의 k제곱근은 k가 커질수록 감소한다. 평균은 그대로 두면서 미분으로 차수를 낮추는 기법은 뉴턴 부등식(Newton's inequalities)으로 가는 표준적인 경로이기도 하다. 더 많은 내용은 Steele의 *The Cauchy–Schwarz Master Class*(코시-슈바르츠 부등식 마스

터 클래스)나, 하디(Hardy), 리틀우드(Littlewood), 포여(Pólya)의 고전 *Inequalities*(부등식)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.