풀이

STEP III 1997, 문제 3

순수수학 • 1의 거듭제곱근

STEP III 1997, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q3

핵심 아이디어

n제곱근 단위근(roots of unity) $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$은 정확히 $z^n - 1$의 근이므로, 이 다항식(polynomial)은 완전히 인수분해된다. 여기서 인수 $z - 1$을 나누어 없애면 첫 번째 항등식을 얻는다. 정다각형을 O가 원점에 오도록 복소평면(complex plane) 위에 놓으면, 꼭짓점은 단위근에 $re^{i\theta}$를 곱한 것이 된다. 그러면 벡터의 합은 등비급수(geometric series)가 되고, 현의 길이의 제곱은 내적(dot product)을 이용하여 $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2$을 전개하면 얻어진다.

풀이

곱 항등식

$k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $(\omega^k)^n = e^{2\pi i k} = 1$이므로, 각 ω^k는 $z^n - 1 = 0$의 근이다. 이 n개의 수는 서로 다르다. 그 편각(argument) $2\pi k/n$이 서로 다르고 모두 $[0, 2\pi)$에 속하기 때문이다. 최고차항의 계수(leading coefficient)가 1이고 서로 다른 근을 n개 가지는 n차 다항식은 그에 대응하는 일차인수(linear factor)들의 곱이므로

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

한편 등비급수의 합을 구하면(또는 그냥 전개해 보면)

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}).$$

모든 $z \neq 1$에 대하여 두 식을 $z - 1$로 나눌 수 있으므로

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \qquad (z \neq 1).$$

생각해 보기 문제는 "임의의 복소수 z"라고 말한다. 나눌 수 없는 $z = 1$일 때는 어떻게 되는가?

양변은 모두 $n-1$차 다항식이고, 무한히 많은 점 $z \neq 1$에서 값이 같다. 그러면 두 다항식의 차는 근을 무한히 많이 가지는 다항식이므로 영다항식이다. (또는 양변이 모두 z에 대하여 연속이므로 $z \to 1$로 보내도 된다.) 따라서 요구한 대로 이 항등식은 $z = 1$을 포함한 모든 복소수 z에 대하여 성립한다.

벡터의 합

원이 놓인 평면을 O가 원점인 복소평면으로 잡고, A_k를 나타내는 복소수를 a_k라 하자. $a_1 = re^{i\theta}$이면, 꼭짓점에 시계 반대 방향으로 차례로 이름을 붙일 때(이웃한 꼭짓점이 O에서 이루는 각은 $2\pi/n$이다)

$$a_k = re^{i\theta}\,\omega^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

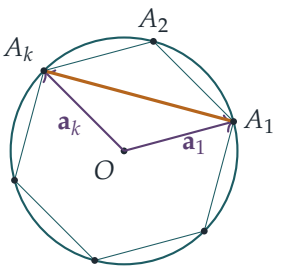
(시계 방향으로 이름을 붙이면 ω가 $\bar{\omega} = \omega^{n-1}$로 바뀔 뿐인데, 이것도 같은 단위근의 집합을 모두 지난다. 게다가 합은 꼭짓점의 순서와 관계가 없다.)

벡터 $\overrightarrow{OA_k}$는 복소수 a_k에 대응하고, 벡터의 덧셈은 복소수의 덧셈에 대응한다. 따라서 다음을 구하면 된다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = re^{i\theta}\left(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}\right).$$

괄호 안의 식은 항등식에 $z = \omega$를 대입했을 때의 우변이다. ($n \geq 2$일 때) ω는 좌변의 인수들 가운데 나타나므로 좌변은 인수 $\omega - \omega = 0$을 가지고, 따라서 괄호 안의 값은 0이다. (마찬가지로, 이것은 공비가 $\omega \neq 1$인 등비급수이므로 $(\omega^n - 1)/(\omega - 1) = 0$과 같다.) 그러므로

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}.$$



거리의 제곱의 합

이제 $\mathbf{a}_k = \overrightarrow{OA_k}$를 벡터로 쓰면, 모든 k에 대하여 $|\mathbf{a}_k| = r$이고 $\overrightarrow{A_1A_k} = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$이다. 내적을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned} |A_1A_k|^2 &= (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1) \\ &= |\mathbf{a}_k|^2 + |\mathbf{a}_1|^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k \\ &= 2r^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

이 식은 양변이 모두 0이 되는 $k = 1$일 때에도 성립한다. $k = 1, \dots, n$에 대하여 더하고, 내적이 덧셈에 대하여 분배법칙을 만족한다는 사실을 이용하면, 앞 부분의 결과에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |A_1A_k|^2 &= 2r^2n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k\right) \\ &= 2r^2n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{0} = 2r^2n, \end{aligned}$$

이다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $n = 2$: 항등식은 $z - (-1) = 1 + z$가 된다. 두 점은 지름의 양 끝점이므로 합은 $0 + (2r)^2 = 4r^2 = 2r^2\cdot 2$이다.
- $n = 4$, $r = 1$: 정사각형의 한 꼭짓점에서 잰 거리의 제곱은 $0, 2, 4, 2$이고, 그 합은 $8 = 2\cdot 1^2\cdot 4$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 $n \le 20$, 반지름, 회전 2000가지에 대하여 벡터의 합은 0이 되었고 현의 길이의 제곱의 합은 10^{-14} 이내의 오차로 $2r^2n$과 일치했다. 곱 항등식도 무작위로 고른 z에서 (그리고 $z = 1$에서) 같은 정확도로 확인했다.

흔한 실수

- $z - 1$로 나누고 나서, 그러면 항등식이 $z \neq 1$일 때에만 증명된다는 사실을 잊는 것.
- $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2 = |\mathbf{a}_k|^2 - |\mathbf{a}_1|^2$이라고 쓰는 것: 교차항 $-2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k$가 바로 핵심이다.

STEP 너머

곱 항등식에 $z = 1$을 대입하고 절댓값(modulus)을 취하면 $|1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n$을 얻는다. 즉 단위원에 내접하는 정$n$각형의 한 꼭짓점에서 그은 현(chord)의 길

이의 곱은 정확히 n이며, 이는 여기서 다룬 제곱의 합과 짝을 이루는 깔끔한 결과이다. 단위근을 이용하여 $z^n - 1$을 인수분해하는 것은 원분다항식(cyclotomic polynomials)과 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)의 출발점이며, 둘 다 대학 과정 초반에 만나게 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이런 종류의 기하를 복소수로 다루는 모습을 볼 수 있는 아름다운 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.