풀이

STEP III 1997, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기

STEP III 1997, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q2

핵심 아이디어

로그(logarithm)를 취하면 $x^y = y^x$는 $y \ln x = x \ln y$가 되고, 양변을 xy로 나누면 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$를 얻는다. 따라서 뒷부분은 사실 앞부분에 관한 문제이다. f의 각 함숫값을 주는 입력이 몇 개인지 알면, 각 x에 짝이 되는 y가 몇 개인지 알 수 있다. 이 방정식은 항상 자명한 해 $y = x$를 가진다. 관심의 대상은 나머지 해이다.

풀이

f의 그래프

몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하면

$$\mathrm{f}'(t) = \frac{t \cdot \frac{1}{t} - \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}, \qquad \mathrm{f}''(t) = \frac{2 \ln t - 3}{t^3}.$$

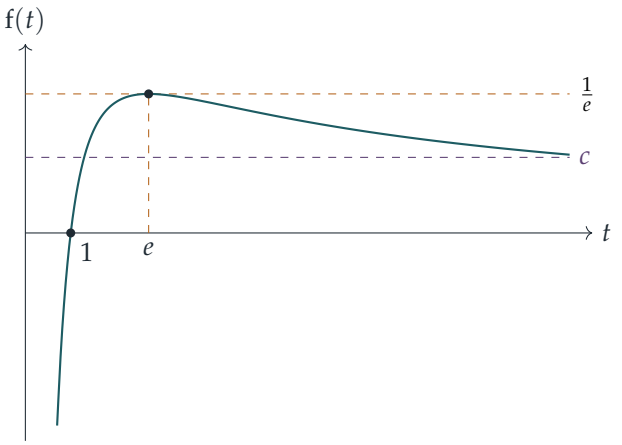
따라서 $0 < t < e$에서 $\mathrm{f}'(t) > 0$이고 $t > e$에서 $\mathrm{f}'(t) < 0$이다. 즉 f는 $(0, e]$에서 순증가(strictly increasing)하고 $[e, \infty)$에서 순감소한다. 최댓값은

$$\mathrm{f}(e) = \frac{1}{e}.$$

개형을 그리는 데 필요한 다른 특징은 다음과 같다.

- $0 < t < 1$에서 $\mathrm{f}(t) < 0$, $\mathrm{f}(1) = 0$, $t > 1$에서 $\mathrm{f}(t) > 0$이다.
- $t \to 0^+$일 때 $\ln t \to -\infty$이고 $1/t \to +\infty$이므로 $\mathrm{f}(t) \to -\infty$이다. 즉 y축이 점근선(asymptote)이다.
- $\ln t$는 t보다 느리게 증가하므로 $t \to \infty$일 때 $\mathrm{f}(t) \to 0^+$이다. 따라서 t축도 점근선이다.

- $t = e^{3/2}$에서 변곡점(point of inflection)이 있고, 그곳에서 $\mathrm{f} = \frac{3}{2}e^{-3/2} \approx 0.33$이다. 개수를 세는 데는 필요 없지만, 개형을 정직하게 그리는 데 도움이 된다.



값 c를 주는 t는 몇 개인가?

f는 $(0, e]$와 $[e, \infty)$ 각각에서 연속이고 순단조(strictly monotonic)이므로, 각 부분은 자신이 도달하는 모든 값을 정확히 한 번씩 취한다. $(0, e]$에서 f는 $-\infty$에서 $\frac{1}{e}$까지 증가하고, $[e, \infty)$에서는 $\frac{1}{e}$에서 0을 향해 감소하지만 그 값에 도달하지는 않는다. 따라서 주어진 값 c에 대하여 다음이 성립한다.

- $c > \frac{1}{e}$: t의 값이 **없다**;
- $c = \frac{1}{e}$: 값이 **하나**, $t = e$;
- $0 < c < \frac{1}{e}$: 값이 **둘**이며, 하나는 $(1, e)$에, 다른 하나는 (e, ∞)에 있다(그림의 수평선 c);
- $c \leq 0$: 값이 **하나**이며 $(0, 1]$에 있다. 감소하는 가지는 항상 양수이기 때문이다.

$x^y = y^x$의 해의 개수 세기

$x, y > 0$이면 양변이 모두 양수이므로 로그를 취할 수 있다. ln은 일대일(one-to-one)이므로 이 과정에서 해가 늘거나 줄지 않는다.

$$x^y = y^x \iff y \ln x = x \ln y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \iff \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(x),$$

여기서 $xy > 0$으로 나누었다. 따라서 x를 고정하면, 양수 y의 개수는 $c = \mathrm{f}(x)$일 때 $\mathrm{f}(t) = c$를 만족하는 t의 개수와 같다. 그중 하나는 항상 $y = x$이다.

? **생각해 보기** $c = \mathrm{f}(x)$는 위의 네 경우 중 실제로 어느 경우에 해당할 수 있을까?

c는 f의 함숫값이므로 $c > \frac{1}{e}$인 경우는 일어날 수 없다. 나머지 경우를 x에 대한 조건으로 바꾸어 쓰면 다음과 같다.

- $0 < x \leq 1$: 이때 $c = f(x) \leq 0$이므로 y는 정확히 **하나**이고, 바로 $y = x$이다.
- $x = e$: 이때 $c = \frac{1}{e}$이므로 y는 정확히 **하나**이고, 바로 $y = e$이다.
- $1 < x < e$ 또는 $x > e$: 이때 $0 < c < \frac{1}{e}$이므로 y의 값은 정확히 **둘**이다. 하나는 $y = x$이고 다른 하나가 더 있다. $1 < x < e$이면 다른 하나는 (e, ∞)에 있고, $x > e$이면 $(1, e)$에 있다.

예를 들어 $2^4 = 4^2 = 16$이므로 $x = 2$의 짝은 $y = 4$이다.

해집합의 개형 그리기

해집합은 직선 $y = x$(모든 $x > 0$에 대하여)와, "다른" 해들로 이루어진 두 번째 곡선으로 구성된다. 이 곡선은 전부 $x > 1, y > 1$인 영역에 놓인다. 그 모양은 다음과 같다.

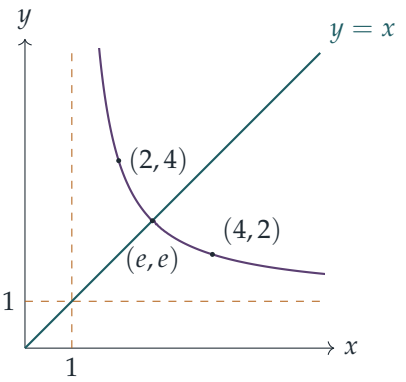
- **대칭성**. x와 y를 서로 바꾸어도 방정식이 변하지 않으므로, 곡선은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.
- **감소**. x가 $(1, e)$에서 증가하면 $f(x)$가 증가하므로, 짝 $y > e$는 f의 값이 더 큰 곳으로 움직여야 한다. 즉 y는 감소한다. $x > e$일 때도 마찬가지이다. 따라서 이 가지에서 y는 x의 감소함수이다.
- **점근선**. $x \to 1^+$일 때 $f(x) \to 0^+$이므로 짝 $y \to \infty$이다. 즉 직선 $x = 1$이 점근선이다. 대칭성에 의해 $x \to \infty$일 때 $y \to 1^+$이고, $y = 1$이 점근선이다.
- **직선 $y = x$와의 교차**. $x \to e$이면 짝도 e로 수렴하므로, 곡선은 (e, e)를 지나고 그곳에서 직선과 교차한다. $t = e$ 근처에서 $f'(e) = 0$과 $f''(e) = -e^{-3}$을 테일러 정리(Taylor's theorem)에 적용하면 $f(t) \approx \frac{1}{e} - \frac{(t-e)^2}{2e^3}$이다. 따라서 $f(x) = f(y)$이면 반드시 $(y-e)^2 \approx (x-e)^2$, 즉 $y - e \approx \pm(x-e)$이다. 양의 부호는 직선 $y = x$에 해당한다. 음의 부호는 우리의 곡선에 해당하며, 따라서 이 곡선은 기울기(gradient) -1로 직선과 수직으로 교차한다.

> **?** **생각해 보기** 이 곡선을 명시적으로 나타낼 수 있을까?

비율로 매개변수화(parametrise)하면 가능하다. $t > 0, t \neq 1$에 대하여 $y = tx$로 두자. 그러면 $x^{tx} = (tx)^x$이고, 양변의 x제곱근을 취하면 $x^t = tx$이므로 $x^{t-1} = t$이며,

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

$t = 2$이면 $(2, 4)$를 얻고, $t = \frac{1}{2}$이면 $(4, 2)$를 얻는다. $t^{1/(t-1)} \to e$이므로 $t \to 1$일 때 두 좌표는 모두 e로 수렴한다. 아래 곡선은 이 방법으로 그린 것이다.



검산

- $2^4 = 4^2$은 유명한 정수 예이며, 예측한 대로 $1 < x < e$와 $x > e$ 부분에서 곡선 위에 놓인다.
- 수치적으로 촘촘한 격자 탐색을 하면 f의 최댓값은 $t \approx 2.718$에서 나타나며 그 값은 $0.367879 \approx 1/e$이다. 이분법(bisection)으로 구하면 $x = 1.01$의 짝은 $y \approx 659$이고, $x = 100$의 짝은 $y \approx 1.050$이다. 이는 점근선 $x = 1, y = 1$과 일치한다.
- $x = e$에서 중심차분(central difference)을 계산하면 두 번째 가지의 기울기는 -1.0000이다.

흔한 실수

- $x \neq e$인 모든 x가 짝을 두 개 가진다고 말하는 것. $0 < x \leq 1$이면 $f(x)$의 값이 양수가 아니므로, $y = x$만 성립한다.
- 최종 개형에서 직선 $y = x$를 빠뜨리거나, 다른 가지가 (e, e)에서 직선과 교차하지 않고 접하도록 그리는 것.
- xy가 아니라 $\ln x$나 $\ln y$(0이 될 수 있다)로 나누는 것.

STEP 너머

두 번째 곡선은 $f(x) - f(y)$의 등위집합(level set)이고, (e, e)는 이 함수의 기울기 벡터가 0이 되는 점이다. 그래서 하나의 매끄러운 곡선이 지나가는 대신 두 가지가 그곳에서 교차한다. 대학 1학년 해석학에서 배우는 음함수 정리(implicit function theorem)는 등위집합이 언제 국소적으로 그래프가 되는지, 그렇지 않을 때 어떤 일이 일어나는지 설명해 준다. Abbott의

Understanding Analysis(해석학 입문서)는 기초를 다지기에 친절한 책이다. 방정식 $x^y = y^x$ 자체에도 오랜 역사가 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.