풀이

STEP III 1997, 문제 14

확률과 통계 • 확률변수의 곱

> **STEP III 1997, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q14

핵심 아이디어

둘레는 가로 길이와 세로 길이의 선형함수(linear function)이므로, 그 평균(mean)과 분산(variance)은 독립(independent)인 확률변수의 합에 대한 규칙에서 바로 나온다. 넓이는 곱이다. 독립인 확률변수에 대해서는 곱의 기댓값(expectation)이 기댓값의 곱과 같으므로, 이를 LB와 L^2B^2에 적용하면 평균과 분산을 구할 수 있다. 종속(dependence)임을 보이는 가장 깔끔한 방법은 0이 아닌 공분산(covariance)을 찾는 것이다. 독립인 확률변수의 공분산은 항상 0이기 때문이다.

풀이

임의로 고른 판의 가로 길이와 세로 길이를 각각 L, B라 하자. 그러면 L과 B는 독립이고

$$\mathrm{E}(L) = \mu_1, \quad \mathrm{Var}(L) = \sigma_1^2, \qquad \mathrm{E}(B) = \mu_2, \quad \mathrm{Var}(B) = \sigma_2^2.$$

이다. 둘레를 $P = 2(L + B)$, 넓이를 $A = LB$라 하자. 앞으로 $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2$을 반복해서 사용한다. 따라서 $\mathrm{E}(L^2) = \mu_1^2 + \sigma_1^2$이고 $\mathrm{E}(B^2) = \mu_2^2 + \sigma_2^2$이다.

둘레

기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2).$$

L과 B는 독립이므로 합의 분산은 분산의 합과 같다. 따라서

$$\mathrm{Var}(P) = 2^2(\mathrm{Var}(L) + \mathrm{Var}(B)) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{표준편차}(P) = 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

넓이

L과 B는 독립이므로 $\mathrm{E}(LB) = \mathrm{E}(L)\,\mathrm{E}(B)$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

분산을 구하려면 $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(L^2B^2)$가 필요하다.

? **생각해 보기** $\mathrm{E}(L^2B^2)$도 여전히 곱으로 나눌 수 있을까?

그렇다. 독립인 확률변수의 함수들은 서로 독립이므로 L^2과 B^2은 독립이고, $\mathrm{E}(L^2B^2) = \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2)$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A) &= \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= (\mu_1^2+\sigma_1^2)(\mu_2^2+\sigma_2^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,\end{aligned}$$

이고

$$\text{표준편차}(A) = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

이다. 곱의 분산이 단순히 $\sigma_1^2\sigma_2^2$이 아니라는 점에 주목하자. 각 방향의 퍼짐이 다른 방향의 전형적인 크기만큼 확대된다.

둘레와 넓이는 독립이 아니다

P와 A가 독립이라면 $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$, 즉 $\mathrm{Cov}(P, A) = 0$이어야 한다. 공분산을 계산해 보자. 먼저

$$\mathrm{E}(PA) = 2\,\mathrm{E}(L^2B) + 2\,\mathrm{E}(LB^2).$$

다시 독립성을 이용하면(이번에는 L^2과 B의 독립성, L과 B^2의 독립성)

$$\mathrm{E}(L^2B) = (\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2, \qquad \mathrm{E}(LB^2) = \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2).$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(P, A) &= \mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)\\ &= 2[(\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2 + \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2)] - 2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2\\ &= 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2).\end{aligned}$$

가로 길이와 세로 길이는 양수이므로 $\mu_1 > 0$이고 $\mu_2 > 0$이다. 또 표준편차(standard deviation)가 0이 아니라고 주어졌으므로 $\sigma_1^2 > 0$이고 $\sigma_2^2 > 0$이다. 그러므로 $\mathrm{Cov}(P, A) > 0$이다.

독립인 확률변수의 공분산은 0이므로 P와 A는 독립일 수 없다. 이는 직관과도 맞는다. 어느 방향으로든 평균보다 큰 판은 둘레도 크고 넓이도 큰 경향이 있다.

생각해 보기 공분산이 0으로 나왔다면, 그것으로 P와 A가 독립임을 보인 것일까?

아니다. 이 함의는 한 방향으로만 성립한다. 독립이면 공분산은 반드시 0이지만, 공분산이 0이라고 해서 반드시 독립인 것은 아니다. 따라서 0이 아닌 공분산은 종속임을 증명하며, 바로 이것이 우리가 얻은 결과이다. 공분산이 0이었다면 아무것도 알려 주지 못했을 것이다.

검산

- L과 B가 독립이고 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 1 또는 3의 값을 갖는다고 하자. 그러면 $\mu_i = 2, \sigma_i^2 = 1$이고 공식은 $\mathrm{Cov}(P, A) = 2(2+2) = 8$을 주는데, 이는 똑같이 가능한 네 가지 판을 직접 나열하여 계산한 값과 일치한다. 종속성도 직접 확인할 수 있다. $\mathrm{P}(P = 4) = \mathrm{P}(A = 1) = \frac{1}{4}$이지만, 두 사건 모두 $L = B = 1$을 뜻하므로 $\mathrm{P}(P = 4 \text{ 이고} A = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16}$이다.
- $\mu_1 = 5, \mu_2 = 3, \sigma_1 = 0.7, \sigma_2 = 0.4$로 시뮬레이션한 결과, 표준편차$(A) \approx 2.919$로 공식의 값 2.913과 가까웠고, $\mathrm{Cov}(P, A) \approx 4.56$으로 공식의 값 4.54와 가까웠다.
- $\sigma_2 \to 0$이면(세로 길이가 μ_2로 고정되면) 표준편차$(A) \to \mu_2\sigma_1$이다. $A = \mu_2 L$이므로 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- $\mathrm{Var}(LB) = \sigma_1^2\sigma_2^2$이라고 쓰거나, 항을 빠뜨린 채 $\mathrm{Var}(LB) = \mathrm{Var}(L)\mathrm{Var}(B) + \ldots$라고 쓰는 것. 항상 $\mathrm{E}(L^2B^2)$을 거쳐서 계산하라.
- $\mathrm{Var}(2(L+B))$에서 인수 2를 제곱하는 것을 잊는 것.
- P와 A가 종속인 이유를 "둘 다 L과 B에 의존하기 때문"이라고 주장하는 것. 이는 직관일 뿐 증명이 아니다. 문제를 해결하는 것은 공분산 계산(또는 확률이 같지 않음을 보이는 구체적인 예)이다.

STEP 너머

상관관계가 없는(uncorrelated) 확률변수와 독립인 확률변수의 구별은 대학 1학년 확률론의 핵심 내용이다. 독립이란 결합분포(joint distribution)가 인수분해된다는 뜻으로, 이는 하나의 적률(moment) 조건보다 훨씬 강한 조건이다. $\mathrm{Var}(LB)$에 대한 계산은 실험 과학 전반에서 쓰이는 "오차 전파(propagation of errors)" 공식의 출발점이기도 하다. Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 독립성, 공분산, 확률변수의 곱을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.