풀이

STEP III 1997, 문제 13

확률과 통계 • 정규분포의 적률생성함수

> **STEP III 1997, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q13

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 적분에 달려 있다. 바로 표준정규분포(standard normal)의 적률생성함수(moment generating function, mgf)이며, 지수에서 완전제곱식을 만들어(completing the square) 구한다. 그다음에는 독립성(independence) 덕분에 합의 적률생성함수가 곱으로 바뀌고, 적률생성함수의 유일성(uniqueness)을 이용해 분포를 읽어 낼 수 있다. 마지막 소문항은 같은 계산이 모습만 바꾼 것이다. $Z = \mathrm{e}^{\mu+\sigma X}$의 거듭제곱은 X의 상수배를 지수로 갖는 지수함수일 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

$M(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$라 하자. 그러면

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-2\theta x)}\,\mathrm{d}x.$$

완전제곱식을 만들면 $x^2 - 2\theta x = (x-\theta)^2 - \theta^2$이므로

$$M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u,$$

이다. 여기서 $u = x - \theta$로 치환하였다. 마지막 적분은 표준정규분포의 확률밀도함수(density)를 전체 구간에서 적분한 것이므로 1이다. 따라서 모든 실수 θ에 대하여

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}.}$$

소문항 (ii)

X와 Y가 독립이므로 $e^{\theta aX}$와 $e^{\theta bY}$도 독립이고, 서로 독립인 확률변수들의 곱의 기댓값(expectation)은 각 기댓값의 곱이다. 소문항 (i)에서 θ를 각각 $a\theta$와 $b\theta$로 바꾸어 쓰면(Y가 X와 같은 분포를 따른다는 사실도 이용한다)

$$\mathrm{E}(e^{\theta(aX+bY)}) = \mathrm{E}(e^{a\theta X})\,\mathrm{E}(e^{b\theta Y}) = e^{\frac{1}{2}a^2\theta^2}\,e^{\frac{1}{2}b^2\theta^2} = e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2}.$$

? **생각해 보기** 적률생성함수가 일치하면 왜 분포에 관한 질문이 해결되는가?

0 근처의 모든 θ에서 존재하는 적률생성함수는 분포를 유일하게 결정한다. 따라서 $aX+bY$가 X와 같은 분포를 따르는 것은 그 적률생성함수가 모든 θ에 대하여 $e^{\frac{1}{2}\theta^2}$와 같을 때, 곧

$$e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2} = e^{\frac{1}{2}\theta^2} \quad \text{모든} \theta.$$

일 때와 정확히 같다. 양변에 로그를 취하고 $\theta \neq 0$인 아무 값을 택하면, 이는 다음과 필요충분조건이다.

$$\boxed{a^2+b^2=1.}$$

("필요조건" 방향은 유일성 없이도 분명하다. $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2+b^2$가 $\mathrm{Var}(X)=1$과 같아야 하기 때문이다.) 일반적으로 $aX+bY$는 평균이 0이고 분산(variance)이 a^2+b^2인 정규분포를 따른다. 예를 들어 $(X+Y)/\sqrt{2}$는 다시 표준정규분포를 따른다.

소문항 (iii)

임의의 실수 θ에 대하여

$$Z^\theta = (e^{\mu+\sigma X})^\theta = e^{\mu\theta}\,e^{(\sigma\theta)X},$$

이고 $e^{\mu\theta}$는 상수이므로, 소문항 (i)에서 θ를 $\sigma\theta$로 바꾸면

$$\mathrm{E}(Z^\theta) = e^{\mu\theta}\,\mathrm{E}(e^{(\sigma\theta)X}) = e^{\mu\theta}\,e^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} = e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

$\theta = 1$로 두면 평균을 얻는다.

$$\boxed{\mathrm{E}(Z) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}.}$$

$\theta = 2$로 두면 $\mathrm{E}(Z^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - (\mathrm{E}(Z))^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\ &= e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).\end{aligned}$$

검산

- $M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}$를 미분하면 $M'(0) = 0$, $M''(0) = 1$이다. 즉 평균은 0, 분산은 1로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- $\sigma = 0$이면 $Z = \mathrm{e}^{\mu}$는 상수이다. 우리가 얻은 공식도 평균 e^{μ}, 분산 0을 준다.
- 수치적으로, $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.5$일 때 정규분포의 확률밀도함수에 대해 적분하면 $\mathrm{E}(Z) \approx 1.5296$, $\mathrm{Var}(Z) \approx 0.6645$를 얻으며, 이는 $\mathrm{e}^{0.425}$ 및 $\mathrm{e}^{0.85}(\mathrm{e}^{0.25} - 1)$과 일치한다. $0.6X + 0.8Y$를 모의실험한 결과 표본분산은 1.000이었다.

흔한 실수

- "X의 평균을 대입하여" $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{e}^{\mu}$라고 쓰는 것. 일반적으로 $\mathrm{E}(g(X)) \neq g(\mathrm{E}(X))$이며, 여기서는 지수함수의 볼록성(convexity) 때문에 평균이 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2}$배만큼 커진다.
- 조건을 $a + b = 1$로 제시하는 것. 더해지는 것은 계수가 아니라 분산이다.

STEP 너머

확률변수 Z는 **로그정규**(log-normal) 분포를 따른다. 이는 블랙-숄즈(Black–Scholes) 모형의 주가처럼, 작은 무작위 인자들이 여러 번 곱해지며 성장하는 양에 대한 표준적인 모형이다. 소문항 (ii)는 놀라운 사실 하나를 엿보게 해 준다. 분산이 유한한 분포 가운데 적절히 척도를 맞춘 합이 같은 분포족에 머무르는 것은 본질적으로 정규분포뿐이며, 이는 중심극한정리(central limit theorem)와 깊이 얽혀 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 적률생성함수, 정규분포, 중심극한정리를 바로 이 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.