풀이

STEP III 1997, 문제 11

역학 • 강체의 회전

> **STEP III 1997, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q11

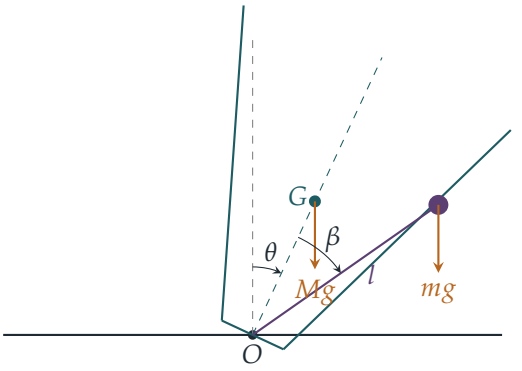
핵심 아이디어

종과 추가 맞닿아 있는 동안, 둘은 같은 점 O를 중심으로 같은 각속도(angular velocity)로 회전하므로, 둘을 떼어 놓을 수 있는 것은 각**가속도**(angular acceleration)의 차이뿐이다. 각각이 홀로 움직인다면 얼마나 빠르게 가속할지를 물어보자. 자유롭게 흔들리는 종이 자유로운 추와 꼭 같은 빠르기로 가속하게 되는 순간에 추와 종이 분리된다. 이때 접촉력은 정확히 0이 되며, 각속도는 전혀 관여하지 않는다.

풀이

모형. 종은 O를 지나는 수평축을 중심으로 자유롭게 회전하는 강체(rigid body)이며, 이 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 Mk^2이다. 추(clapper)는 길이 l인 가볍고 단단한 막대 끝에 달린 질량 m인 입자이며, 이 막대 역시 O에 축으로 고정되어 있다. 회전축에는 마찰이 없고 공기 저항도 없다. 모든 각은 **위쪽** 연직 방향에서 재며, 축에서 보아 추가 놓인 쪽을 양의 방향으로 한다. 종의 축 OG가 이루는 각을 θ라 하자. 둘이 맞닿아 있는 동안 추의 막대는 종의 축과 각 β를 유지하므로, 막대가 이루는 각은 $\theta + \beta$이다.

종 안에서 추의 공은 자신이 떨어지려는 쪽의 안쪽 벽에 기대어 있다. 따라서 벽은 공을 뒤쪽(각이 작아지는 쪽)으로 밀고, 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 따라 공은 종을 앞쪽으로 민다. 이 접촉력(마찰력이 있다면 그것까지 포함)의 O에 대한 모멘트를 $\Gamma \geq 0$이라 하자. 이 모멘트는 추에는 $-\Gamma$로, 종에는 $+\Gamma$로 작용한다.



접촉 상태의 운동 방정식. 각 물체에 대해 따로 O에 대한 모멘트를 취하면(회전축에서의 반력과 막대의 장력은 O에 대한 모멘트가 없다) 다음을 얻는다.

$$\text{추:}\quad ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta+\beta) - \Gamma,$$
$$\text{종:}\quad Mk^2\ddot{\theta} = Mgh\sin\theta + \Gamma.$$

무게 mg는 O로부터 거리 l인 곳에, 연직 방향과 각 $\theta+\beta$를 이루는 직선을 따라 작용하므로 그 모멘트는 $mgl\sin(\theta+\beta)$이다. G에 작용하는 Mg도 마찬가지이다. 두 물체는 함께 움직이므로 같은 $\ddot{\theta}$를 가진다.

두 방정식을 더하면 Γ가 소거된다.

$$\ddot{\theta} = \frac{g(ml\sin(\theta+\beta) + Mh\sin\theta)}{ml^2 + Mk^2}.$$

이를 추의 방정식에 다시 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\Gamma = \frac{mMgl}{ml^2+Mk^2}\Big(k^2\sin(\theta+\beta) - hl\sin\theta\Big).$$

놓는 순간에는 $\theta = 0$이고 $\Gamma = \dfrac{mMglk^2\sin\beta}{ml^2+Mk^2} > 0$이므로, 처음에는 당연히 추가 종을 누르고 있다.

생각해 보기 각속도가 얼마이든, 왜 분리는 정확히 Γ가 0에 이를 때 일어나는가?

접촉은 밀기만 할 수 있으므로 $\Gamma \geq 0$이어야 한다. $\Gamma > 0$인 동안에는 자유로운 추가 종보다 더 빠르게 가속하려 하므로 벽에 눌린 채 둘이 함께 움직인다. 둘은 같은 점 O를 중심으로 같은 각속도로 회전하므로, 공과 벽 사이의 틈은 각가속도의 차이를 통해서만 벌어질 수 있다. Γ가 음수가 되려는 순간, 종 자신의 가속도 $gh\sin\theta/k^2$가 추의 가속도 $g\sin(\theta+\beta)/l$보다 커지고, 벽이 공에서 멀어진다. 따라서 분리는 $\Gamma = 0$이 되는 첫 번째 θ에서 일어난다. (괄호 안의 식은 $\theta = 0$에서 $k^2\sin\beta > 0$이고 $\theta = \pi$에서 $-k^2\sin\beta < 0$이므로, 이러한 θ는 $\theta = \pi$ 이전에 반드시 존재한다.)

분리 각. 분리될 때 추의 막대가 위쪽 연직 방향과 이루는 각을 $\alpha = \theta + \beta$라 하자. 그러면 $\Gamma = 0$으로부터 다음을 얻는다.

$$k^2 \sin\alpha = hl\sin(\alpha - \beta) = hl(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta).$$

여기서 $0 < \alpha < \pi$이므로 $\sin\alpha \neq 0$이고, $\sin\beta \neq 0$이다. $hl\sin\alpha\sin\beta$로 나누면

$$\frac{k^2}{hl\sin\beta} = \cot\beta - \cot\alpha,$$

즉

$$\cot\alpha = \cot\beta - \frac{k^2}{hl}\operatorname{cosec}\beta,$$

이므로 증명하려던 식을 얻는다. 어느 질량도 나타나지 않는다는 점에 주목하자.

검산

- **짧은 추.** $l \to 0$이면 보정 항이 한없이 커지므로 $\cot\alpha \to -\infty$이고 $\alpha \to \pi$이다. 이는 타당하다. 짧은 진자는 자유 각가속도 $g\sin\alpha/l$가 크므로, 아주 짧은 막대에 달린 추는 $\sin\alpha$가 거의 0이 될 때까지, 즉 둘이 거의 거꾸로 설 때까지 종을 계속 민다.
- **동치인 형태.** 이 조건은 단지 $\dfrac{g\sin\alpha}{l} = \dfrac{gh\sin(\alpha-\beta)}{k^2}$, 즉 자유로운 추와 자유로운 종의 각가속도가 같다는 것이다.
- **수치 확인.** $k = 1$, $h = 0.6$, $l = 0.8$, $\beta = 30°$로 두면 공식에서 $\cot\alpha = \sqrt{3} - 25/6 \approx -2.43$이므로 $\alpha \approx 157.7°$이다. 놓는 순간부터 결합된 운동을 단계별로 수치 적분하다가 Γ가 처음 0이 될 때 멈추면, $M/m = 5$일 때와 $M/m = 500$일 때 모두 소수점 아래 여러 자리까지 같은 각을 얻는다.

흔한 실수

- 에너지 보존을 이용해 $\dot\theta$를 구한 뒤 원운동으로부터 "수직 항력"을 구하려 하는 것. 각속도는 두 물체에 공통이며, 둘이 분리되는지 여부에는 아무 역할도 하지 않는다.
- α를 위쪽 연직 방향이 아니라 종의 축에서 재는 것. 접촉하는 동안 막대는 내내 축과 각 β를 이루므로 $\alpha = \theta + \beta$이다.
- Mk^2가 G가 아니라 O에 대한 관성 모멘트라는 사실을 잊는 것. 여기서는 평행축 정리(parallel-axis theorem)에 의한 보정이 필요하지 않다.

STEP 너머

이 문제는 구속 조건(constraint)이 깨지는 시점을 찾는 일반 원리의 깔끔한 예이다. 구속된 운동을 풀고, 구속력을 계산한 다음, 그 부호가 바뀌는 곳을 찾는 것이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)를 이용해 이 과정을 체계화하는데, 이 승수가 바로 구속력임이 밝혀진다. 같은 아이디어로 구의 표면을 떠나는 입자라는 고전적인 문제도 풀 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축에 대한 강체의 회전을 다루며, 훌륭한 준비 자료이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.