풀이

STEP III 1997, 문제 10

역학 • 미끄러지며 구르기

STEP III 1997, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q10

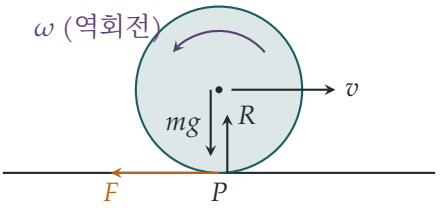
이 문제는 *Beyond STEP*의 11.6 절 **백스핀**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/backspin.html

핵심 아이디어

중요한 것은 구슬의 밑부분이 탁자 위에서 미끄러지고 있는지 여부이다. 미끄러지는 동안에는 마찰력(friction)의 크기와 방향이 일정하므로, 병진 운동과 회전 운동 모두 등감속 운동이 되어 정확히 식으로 나타낼 수 있다. 미끄러짐은 접촉점이 탁자에 대해 정지하는 순간 끝나며, 그 뒤로 구슬은 마찰력 없이 구른다(rolling). 따라서 이 문제의 핵심은 $v = 0$, $\omega = 0$, 그리고 미끄럼 속도(slip velocity)가 0이 되는 것 가운데 무엇이 먼저 일어나는가이다.

풀이

모형. 구슬은 질량 m, 반지름 a인 균일한 속이 찬 구이므로, 지름에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $I = \frac{2}{5}ma^2$이다. v를 중심의 속도(v_0의 방향을 양으로 한다)로, ω를 **뒤로 도는** 방향의 각속도(angular velocity)(역회전(backspin)을 양으로 한다)로 잡으면 $v(0) = v_0 > 0$이고 $\omega(0) = \omega_0 > 0$이다. 손가락은 운동을 시작시킬 뿐이고, 그 뒤에 작용하는 힘은 무게 mg, 수직항력(normal reaction) $R = mg$, 그리고 접촉점 P에서의 마찰력 F이다.



역회전이 있으면 구슬의 밑부분은 중심에 대해 속력 $a\omega$로 앞쪽으로 움직이므로, 접촉점의 속도는

$$s = v + a\omega.$$

이다. 처음에는 $s = v_0 + a\omega_0 > 0$이다. 즉 구슬은 탁자 위에서 앞쪽으로 미끄러지므로, 마찰력은 크기가 일정한 F로 **뒤쪽으로** 작용한다. $F = mk$로 놓는다.

미끄러지는 동안의 운동 방정식. 수평 방향으로 분해하면 $m\dot{v} = -F$이다. 중심에 대한 모멘트를 생각하면, 밑부분에 뒤쪽으로 작용하는 마찰력은 구슬을 앞으로 구르는 방향으로 돌리므로 역회전을 줄인다.

$$\tfrac{2}{5}ma^2\,\dot{\omega} = -Fa \quad\Longrightarrow\quad \dot{\omega} = -\frac{5k}{2a}.$$

두 값 모두 상수이므로, 구슬이 앞쪽으로 계속 미끄러지는 동안

$$v = v_0 - kt, \qquad a\omega = a\omega_0 - \tfrac{5}{2}kt, \qquad s = v_0 + a\omega_0 - \tfrac{7}{2}kt.$$

이다. 따라서 미끄럼 속도는

$$t_1 = \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7k},$$

에서 0이 되고, 그때까지 마찰력의 방향은 바뀌지 않으므로, 도중에 v나 ω의 부호가 바뀌더라도 이 식들은 구간 $0 \le t \le t_1$ 전체에서 성립한다.

> **생각해 보기** $t = t_1$에서 무슨 일이 일어나는가? 그리고 왜 구슬은 그 뒤에 반대 방향으로 미끄러지기 시작하지 않는가?

t_1에서 접촉점은 정지해 있으므로 $v = -a\omega$이다. 즉 구슬은 구르고 있다. 구슬이 일정한 속력으로 계속 구른다면 아무것도 구슬을 밀 필요가 없으므로, 마찰력(미끄러짐이 없을 때에는 필요한 만큼만 크면 된다)은 0이 되고, 일정한 속도로 구르는 운동은 모든 방정식과 모순되지 않는다. 따라서 t_1부터 구슬은 속도

$$V = v(t_1) = v_0 - \tfrac{2}{7}(v_0 + a\omega_0) = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

로 등속으로 구른다.

소문항 (i)

구슬이 결국 완전히 멈추려면 최종 구름 속도가 0이어야 한다. 즉 $V = 0$이므로 $5v_0 = 2a\omega_0$, 다시 말해

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}.$$

이다. 이 상황이 말이 되는지 확인해 보자. 이 비율에서는 $t = v_0/k$일 때 $v = 0$이 되고, $t = 2a\omega_0/(5k) = v_0/k$일 때 $\omega = 0$이 되어 같은 순간이며, 이는 t_1이기도 하다. 따라서 구슬이 아직 미끄러지는 동안 병진 운동과 회전 운동이 함께 사라지고, 그 뒤로 구슬은 정지한 채로 있다(미끄러짐도 마찰력도 없다).

소문항 (ii)

이번에는 구슬이 결국 속력 $v_0/7$로 뒤쪽으로 굴러가야 하므로 $V = -v_0/7$이다.

$$\frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7} = -\frac{v_0}{7} \quad \Longrightarrow \quad 6v_0 = 2a\omega_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}.$$

이 비율에서 v는 $t = v_0/k$에서 0이 되는데, 이는 $t_1 = 2(v_0 + 3v_0)/(7k) = 8v_0/(7k)$보다 앞선다. 그 순간 구슬은 잠시 멈추지만 여전히 역회전 $\omega = \omega_0 - \frac{5v_0}{2a} = \frac{v_0}{2a} > 0$을 가지므로, 밑부분은 여전히 앞쪽으로 미끄러지고 마찰력은 계속 구슬을 뒤로 끌어당긴다. t_1에서 $v = -v_0/7$, $a\omega = v_0/7$이 되므로, 구슬은 요구한 대로 속력 $v_0/7$로 출발점을 향해 되굴러 온다.

> **생각해 보기** t_1을 구하지 않고 V를 더 빨리 얻는 방법이 있는가?

있다. 운동하는 직선 위, 탁자 표면의 고정점 O에 대한 각운동량(angular momentum)을 생각하자. 마찰력은 탁자 표면을 따라 작용하므로 O에 대한 모멘트가 없고, R과 mg의 모멘트는 서로 상쇄된다. 앞으로 구르는 방향을 기준으로 O에 대한 각운동량은 mva(중심의 높이가 a이다)에서 회전 부분 $\frac{2}{5}ma^2\omega$를 뺀 것이므로, 다음이 보존된다.

$$mv_0a - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0 = maV + \tfrac{2}{5}ma^2 \cdot \frac{V}{a} = \tfrac{7}{5}maV,$$

따라서 다시 $V = (5v_0 - 2a\omega_0)/7$을 얻는다.

검산

- 회전이 없으면($\omega_0 = 0$) 공식은 $V = \frac{5}{7}v_0$을 주는데, 이는 회전 없이 미끄러지며 출발한 공에 대한 잘 알려진 결과이다.
- $v_0 = 0$이고 역회전만 있으면 $V = -\frac{2}{7}a\omega_0 < 0$이다. 역회전을 걸어 구슬을 튕겨 본 사람이라면 누구나 알듯이, 구슬은 뒤쪽으로 움직인다.

- 방정식을 수치적으로 단계별로 계산하면(미끄럼 속도가 0이 되면 마찰력을 끈다) $v_0 = 1$, $a\omega_0 = 3$일 때 최종 속도 $-0.142857\ldots = -\frac{1}{7}$을, $v_0 = 2$, $a\omega_0 = 5$일 때 완전한 정지를 얻는다.

흔한 실수

- $v = 0$에서 시간을 멈추는 것. 구슬은 $v + a\omega = 0$일 때에야 미끄러짐을 멈춘다. 소문항 (ii)에서처럼 $v = 0$일 때에도 여전히 회전이 남아 있을 수 있다.
- 토크(torque)의 부호를 틀리는 것. 밑부분에 뒤쪽으로 작용하는 마찰력은 역회전을 줄인다.
- 구르기 시작한 뒤에도 마찰력을 계속 작용시키는 것. 미끄러짐이 없으면 등속 운동에는 마찰력이 필요 없으므로, 마찰력은 0으로 떨어진다.

STEP 너머

여기서의 마찰력은 쿨롱(Coulomb)의 미끄럼 마찰 모형이다. 두 면이 미끄러지는 동안에는 크기가 일정하고, 미끄러지지 않을 때에는 (한계까지) 필요한 만큼의 크기를 가진다. 각운동량을 이용한 지름길은 강체 동역학(rigid-body dynamics)의 일반 원리, 즉 다루기 곤란한 미지의 힘이 모멘트를 갖지 않도록 기준점을 고르라는 원리의 한 예이다. 스누커와 당구 선수들은 끌어치기(screw-back) 샷에서 바로 이 물리를 활용한다. Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 미끄러지며 구르는 운동을 이러한 관점에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.