풀이

STEP III 1997, 문제 1

순수수학 • 지수함수의 거듭제곱급수

STEP III 1997, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q1

핵심 아이디어

$\mathrm{e}^x = \sum x^n/n!$에 다항식을 곱하면 급수가 옆으로 밀린다. 그러면 x^n의 계수는 $1/n!$, $1/(n-1)!$, $1/(n-2)!$, ...의 일차결합이 되고, 공통분모 $n!$로 통분하면 분자는 n에 대한 다항식이 된다. $x = 1$을 대입하면 거듭제곱급수(power series)의 항등식이 수치 급수(series)의 항등식으로 바뀐다. 따라서 이 문제 전체는 원하는 분자를 만들어 내는 다항식을 고르는 문제이다. 하강 계승(*falling factorial*) n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$가 자연스러운 기본 단위가 되는데, 그 까닭은 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n! = 1/(n-k)!$이기 때문이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$은 모든 실수 x에 대하여 절대수렴(absolute convergence)한다. 여기에 다항식을 곱하면 이런 급수들의 유한한 합이 되므로, 급수들을 항별로 더한 다음 $x = 1$을 대입해도 된다. 음의 정수 m에 대하여 $1/m! = 0$으로 약속한다. 이렇게 하면 아래의 모든 합을 $n = 0$부터 시작할 수 있다.

소문항 (i)

다음이 성립한다.

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+2}}{n!} + 5\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n!} + 4\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

x^n의 계수를 모으기 위해 앞의 두 합의 첨자를 다시 매긴다. 계수는

$$\frac{1}{(n-2)!}+\frac{5}{(n-1)!}+\frac{4}{n!}=\frac{n(n-1)+5n+4}{n!}$$
$$=\frac{n^2+4n+4}{n!}=\frac{(n+2)^2}{n!}.$$

이다. 이 식은 $n=0$과 $n=1$을 포함한 모든 $n\geq 0$에 대하여 성립하는데, 이때 빠진 항들은 $1/m!=0$이라는 약속으로 처리된다. ($n=0$일 때 계수는 $4=2^2/0!$이고, $n=1$일 때는 $5+4=9=3^2/1!$이다.) 따라서

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)^2}{n!}\,x^n,$$

이고, $x=1$을 대입하면

$$10\,\mathrm{e}=\frac{2^2}{0!}+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\cdots=4+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\cdots,$$

을 얻어 원하는 결과가 나온다.

소문항 (ii)

이번에는 일반항이 $(n+1)^2/n!$이므로, 그 급수의 계수가

$$\frac{n(n-1)+bn+c}{n!}=\frac{(n+1)^2}{n!}.$$

이 되는 이차식 x^2+bx+c를 찾으면 된다.

? **생각해 보기** 어림짐작 없이 b와 c를 어떻게 구할 수 있을까?

목표 분자를 하강 계승으로 나타낸다: $n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$. 계수를 비교하면 $b=3$, $c=1$이다. 따라서 소문항 (i)과 똑같은 논증으로

$$(x^2+3x+1)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}\,x^n,$$

이고, $x=1$을 대입하면

$$(1+3+1)\,\mathrm{e}=5\,\mathrm{e}=1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots.$$

이다.

소문항 (iii)

일반항이 $(n+1)^3/n!$이므로 이제 삼차식이 필요하다. $(ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^x$에서 x^n의 계수는

$$\frac{a}{(n-3)!}+\frac{b}{(n-2)!}+\frac{c}{(n-1)!}+\frac{d}{n!}=\frac{a\,n(n-1)(n-2)+b\,n(n-1)+c\,n+d}{n!}.$$

이다. 목표 분자를 하강 계승으로 전개한다. $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$이고 $n^2 = n(n-1) + n$이므로

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= [n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n] + 3[n(n-1) + n] + 3n + 1 \\ &= n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1.\end{aligned}$$

이다. (간단히 검산해 보자. $n = 1$일 때 양변은 모두 8이다. $n = 2$일 때는 $27 = 0 + 12 + 14 + 1$이다.) 따라서 $a = 1, b = 6, c = 7, d = 1$이고

$$(x^3 + 6x^2 + 7x + 1)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^3}{n!}\, x^n.$$

이다. $x = 1$을 대입하면

$$1 + \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \cdots = (1 + 6 + 7 + 1)\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}.$$

? 생각해 보기 왜 급수를 항별로 그냥 제곱하거나 세제곱하면 안 될까?

$\sum (n+1)^3/n!$은 $\sum (n+1)/n!$로부터 간단한 방법으로 만들어지지 않기 때문이다. 합은 분자에 대하여 선형이므로, 우리가 할 수 있는 것은 분자를 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 꼴의 조각들로 쪼개는 것이다. 각 조각은 $n!$과 약분되어 e의 급수를 밀어 놓은 사본이 된다. 이런 조각 하나하나는 $x = 1$에서 정확히 e만큼 기여한다. 따라서 답은 e에 하강 계승 계수들의 합 $1 + 6 + 7 + 1 = 15$를 곱한 것이다.

검산

- $n = 60$까지의 부분합은 $27.1828\ldots$, $13.5914\ldots$, $40.7742\ldots$이며, 기계 정밀도 범위에서 10e, 5e, 15e와 일치한다.
- 세 분자 항등식의 계수는 $n = 0, \ldots, 39$에 대하여 정확히 확인하였다.
- 일관성: 소문항 (ii)의 급수는 $\sum (n+1)^2/n!$이고 소문항 (i)의 급수는 $\sum (n+2)^2/n!$이다. 그 차 $\sum (2n+3)/n! = 2\sum n/n! + 3\sum 1/n! = 2\mathrm{e} + 3\mathrm{e} = 5\mathrm{e}$는 실제로 $10\mathrm{e} - 5\mathrm{e}$와 같다.

흔한 실수

- 합의 첨자를 다시 매길 때 처음 두 항($n = 0, 1$)을 따로 살펴야 한다는 점을 잊는 것. $m < 0$에 대하여 $1/m! = 0$이라는 약속이 이 항들을 처리해 주지만, 직접 확인해 보아야 한다.

- $(n+1)^3$을 하강 계승이 아니라 거듭제곱 n^3, n^2, n과 비교하여 엉뚱한 삼차식을 고르는 것.

STEP 너머

합 $\sum_{n\geq 0} n^k/n!$은 $B_k\,\mathrm{e}$이다. 여기서 B_k는 k번째 벨 수(Bell number), 곧 k개의 대상으로 이루어진 집합을 분할(partition)하는 방법의 수이다: $B_0, \ldots, B_4 = 1, 1, 2, 5, 15$. 이것이 도빈스키(Dobiński)의 공식이다. 실제로 $m = n+1$로 두면 소문항 (iii)은 $\sum_{m\geq 1} m^4/m! = B_4\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}$이고, 계수 $1, 6, 7, 1$은 제2종 스털링 수(Stirling numbers of the second kind) $1, 7, 6, 1$을 거꾸로 늘어놓은 것이다. 거듭제곱급수를 항별로 재배열하고 결합해도 되는 근거는 절대수렴이며, 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. 이론은 Abbott의 *Understanding Analysis*를, 이런 종류의 문제를 더 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.