풀이

STEP II 1997, 문제 9

역학 • 마찰과 강체 평형

STEP II 1997, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

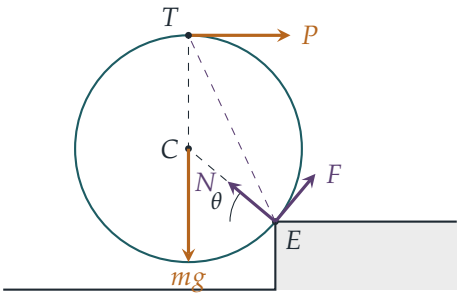
step.maths.org/questions/97-s2-q9

핵심 아이디어

구를 **천천히** 끌어올리므로 구는 매 순간 평형 상태에 있고, 따라서 각 위치에서 정역학(statics) 문제를 풀면 된다. 구가 바닥에서 떨어지고 나면 구에 작용하는 힘은 무게, 꼭대기에서 당기는 힘, 계단 모서리에서의 반력, 이렇게 세 가지뿐이다. 모서리에 대한 모멘트(moment)를 취하면 미지의 반력이 사라지고 당기는 힘이 구해진다. 그다음 세 힘의 법칙(세 작용선이 한 점에서 만나야 한다)이 반력의 방향을 정확히 알려 주고, 이로부터 마찰 조건이 거의 저절로 얻어진다.

풀이

반지름을 $r = \frac{1}{2}d$라 하면 계단의 높이는 $\frac{1}{4}d = \frac{1}{2}r$이다. 구를 모서리 E에서만 계단과 닿는 균일한 강체(rigid body)로 모형화한다(모서리는 수평선이지만, 중심을 지나는 연직 단면에서는 한 점이다). 중심을 C, 가장 높은 점을 T라 하자. 이 점에서 수평 힘 P가 계단 쪽으로 작용한다. EC가 수평선과 이루는 각을 θ라 하자.



기하

E를 원점으로 하면, C는 E보다 $r\sin\theta$만큼 높고 수평 거리로 $r\cos\theta$만큼 떨어져 있으며, T는 C보다 다시 r만큼 위에 있다. 처음 구가 바닥에 놓여 있을 때 C는 바닥에서 r만큼 높으므로 E보다 $\frac{1}{2}r$만큼 높다. 따라서 $\sin\theta = \frac{1}{2}$이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$이다. C가 E의 바로 위에 올 때, 즉 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 구는 완전히 계단 위에 올라간다. 따라서 이 운동은 θ가 $\frac{\pi}{6}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 증가하는 것에 해당한다.

최대 힘

구가 아직 바닥에 닿아 있는 동안에는 바닥이 무게의 일부를 떠받치며, 바닥은 위로만 밀 수 있다. P가 바닥의 반력이 0으로 떨어질 만큼 커지는 순간 구가 떠오르기 시작한다. 그 뒤로 작용하는 힘은 T에서의 P, C에서의 무게 mg, 그리고 E에서의 모서리의 반력이며, 이 반력은 EC 방향의 수직 성분(normal component) N과 EC에 수직인 마찰력(friction) F로 이루어진다.

E에 대한 모멘트를 취하면(반력은 이 점에 대해 모멘트가 없다), P의 팔의 길이는 E에 대한 T의 높이인 $r(1+\sin\theta)$이고, 무게의 팔의 길이는 $r\cos\theta$이다. 평형 조건에서

$$P\,r(1+\sin\theta) = mg\,r\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$에서 분자는 감소하고 분모는 증가하므로 P는 θ에 대해 감소한다. (떠오르기 전에는 P가 이 값까지 커질 뿐이다.) 따라서 최댓값은 바닥을 떠나는 순간인 $\theta = \frac{\pi}{6}$에서 나타난다:

$$P_{\max} = \frac{mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

마찰 조건

> ? **생각해 보기** 모서리에서의 반력은 어느 방향을 향하는가?

평형 상태에 있는 서로 평행하지 않은 세 힘의 작용선은 한 점에서 만난다(concurrent). P의 작용선은 T를 지나는 수평선이고, 무게의 작용선은 C를 지나는 연직선으로 이 역시 T를 지난다. 따라서 두 선은 T에서 만나고, E에서의 전체 반력은 ET를 따라 작용해야 한다.

이제 $CE = CT = r$이므로 삼각형 CET는 이등변삼각형이다. C에서 CT(연직 위쪽)와 CE(수평선 아래로 각 θ만큼 내려가는 방향) 사이의 각은 $\frac{\pi}{2}+\theta$이므로, 각 밑각은

$$\angle CET = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\theta}{2}.$$

이는 전체 반력과 법선 EC 사이의 각이므로

$$\frac{F}{N} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

힘을 분해하여 이를 확인할 수 있다. 반력은 P와 무게를 상쇄하므로 $(-P,\ mg)$이다. 단위 법선 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 방향과 단위 접선 $(\sin\theta, \cos\theta)$ 방향의 성분은

$$N = P\cos\theta + mg\sin\theta = mg\,\frac{\cos^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta}{1+\sin\theta} = mg,$$
$$F = mg\cos\theta - P\sin\theta = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta},$$

이다. 따라서 $F/N = \cos\theta/(1+\sin\theta)$이고, 이는 반각 공식(half-angle formulae)에 의해 $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$와 같다. F와 N은 전 구간에서 양수이므로, 모서리는 실제로 구를 밀고 있고 마찰력은 그림처럼 접선을 따라 위쪽으로 작용한다.

E에서 미끄러지지 않으려면 모든 위치에서 $F \le \mu N$이어야 한다. 즉

$$\mu \ge \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{단, } \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

우변은 θ가 증가할수록 감소하므로, 가장 까다로운 위치는 이번에도 $\theta = \frac{\pi}{6}$이며, 이때 우변의 값은 $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 그 순간 마찰력은 수직항력의 $1/\sqrt{3}$배 이상이어야 한다. 정확히 $\mu = 1/\sqrt{3}$이면 마찰이 한계 상태(limiting)가 되어 구가 막 미끄러지려 하므로, 미끄러지지 않고 안전하게 끌어올리려면 요구된 대로 $\mu > 1/\sqrt{3}$이어야 한다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 중심은 모서리 바로 위에 있다. 이때 당연히 $P = 0$이고 $F = 0$이다.
- 전 구간에서 $N = mg$이며, 이는 타당하다. 반력은 $(-P, mg)$이고, 그 법선 방향 성분이 정확히 mg로 계산된다.
- 수치적으로, 모멘트와 분해를 따로 계산하면서 θ를 $\frac{\pi}{6}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 조금씩 늘려 보면, P/mg와 F/N의 최댓값은 둘 다 처음에 나타나는 $0.57735\ldots = 1/\sqrt{3}$이다.

흔한 실수

- E에 대한 P의 모멘트 팔을 $r(1+\sin\theta)$(T의 높이) 대신 $r\sin\theta$(C의 높이)로 잡는 것.
- 모서리에서의 반력이 순전히 법선 방향이라고 가정하는 것. 그럴 수는 없다. 법선은 C를 지나므로, 그렇다면 세 힘이 한 점에서 만나지 않게 된다.

STEP 너머

세 힘 논증은 더 일반적인 사실의 특수한 경우이다. 강체는 전체 힘과 임의의 한 점에 대한 전체 모멘트가 모두 0일 때, 그리고 그때에만 평형 상태에 있으며, 세 힘의 경우 이 조건

때문에 작용선이 한 점에서 만날 수밖에 없다. 반력과 법선 사이의 각, 여기서는 $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$는 "마찰각(angle of friction)" 개념으로, 마찰 문제를 기하 문제로 바꾸어 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 원리로부터 강체의 정역학과 동역학을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.