풀이

STEP II 1997, 문제 8

순수수학 • 적분을 이용한 부등식

> **STEP II 1997, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q8

핵심 아이디어

$(x^p - 1)/p$ 꼴의 식은 모두 모습을 바꾼 적분(integral)이다. 즉 이 식은 $\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t$와 같다. 따라서 이런 두 식을 비교하는 문제는 피적분함수(integrand) t^{p-1}과 t^{q-1}을 비교하는 문제로 바뀌고, 이 비교는 $t = 1$에서 대소가 뒤바뀐다는 점만 알아차리면 쉽다. 마지막 부등식은 한 번 더 적분하면 얻어지는데, 이번에는 방금 증명한 부등식 자체를 적분한다.

풀이

부등식의 적분

$[a, b]$에서 $\mathrm{f}(t) \geq \mathrm{g}(t)$이면 그 구간에서 $\mathrm{f} - \mathrm{g} \geq 0$이다. 따라서 $\mathrm{f} - \mathrm{g}$의 그래프와 t축 사이의 영역은 축 위 또는 축보다 위쪽에 있고, 그 부호 있는 넓이(signed area)는 음이 아니다.

$$\int_a^b \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t))\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

여기에는 $a \leq b$라는 조건이 필요하다는 점에 주의한다. 적분 구간의 위끝과 아래끝이 뒤바뀌어 있으면 두 적분 사이의 부등호 방향도 반대가 된다.

$x \geq 1$인 경우

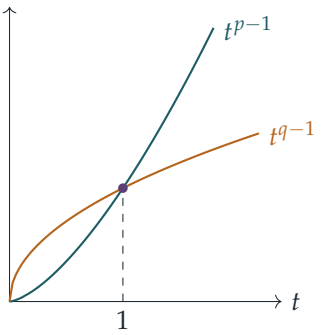
$t \geq 1$이고 $p > q$이면 $t^{p-1} = t^{q-1}\,t^{p-q} \geq t^{q-1}$이다. $t \geq 1$이고 $p - q > 0$일 때 $t^{p-q} \geq 1$이기 때문이다. $x \geq 1$이므로 구간 $[1, x]$의 끝점은 올바른 순서로 놓여 있고, 따라서 앞부분의 결과에 의해

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

$p, q > 0$이므로 두 적분은 바로 계산할 수 있다.

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^p}{p}\right]_1^x = \frac{x^p - 1}{p}, \qquad \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^q - 1}{q}.$$

따라서 $x \geq 1$일 때 $\dfrac{x^p - 1}{p} \geq \dfrac{x^q - 1}{q}$이고, 이것이 증명하려던 것이다.



위 그림($p = 2.5, q = 1.5$로 그렸다)이 요점을 보여 준다. 지수가 더 큰 쪽이 $t > 1$에서는 더 크고 $0 < t < 1$에서는 더 작다.

$0 \leq x \leq 1$인 경우

> **생각해 보기** $0 < t < 1$에서는 t^{p-1}과 t^{q-1} 사이의 부등호 방향이 반대가 된다. 그런데 왜 결론의 부등호 방향은 바뀌지 않을까?

두 번의 뒤바뀜이 서로 상쇄된다. $0 < t \leq 1$이면 $t^{p-q} \leq 1$이므로 $t^{p-1} \leq t^{q-1}$이다. 그런데 이제 $x \leq 1$이므로 올바른 순서의 구간은 $[1, x]$가 아니라 $[x, 1]$이다.

먼저 $0 < x \leq 1$인 경우를 보자. $t^{q-1} \geq t^{p-1}$을 $[x, 1]$에서 적분하면($x > 0$이므로 두 함수는 이 구간에서 연속(continuous)이다)

$$\int_x^1 t^{q-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_x^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{1 - x^q}{q} \;\geq\; \frac{1 - x^p}{p}.$$

양변에 -1을 곱하면 부등호 방향이 바뀌어 $\dfrac{x^p - 1}{p} \geq \dfrac{x^q - 1}{q}$를 얻는다.

$x = 0$인 경우는 직접 확인한다. 이때 부등식은 $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$가 되는데, $p > q > 0$이면 $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$이므로 참이다. ($x = 0$을 따로 다루는 까닭은 $q < 1$이면 t^{q-1}이 0 근처에서 유계가 아니기(unbounded) 때문이다.) 따라서 부등식은 모든 $0 \leq x \leq 1$에서 성립하고, 앞의 경우와 합치면 모든 $x \geq 0$에서 성립한다.

마지막 부등식

$\phi_p(t) = \dfrac{t^p - 1}{p}$로 놓자. 지금까지 $p > q > 0$이면 모든 $t \geq 0$에 대하여 $\phi_p(t) \geq \phi_q(t)$임을 보였다. 두 함수는 모두 $[0, \infty)$에서 연속이므로, $x > 0$에 대하여 이 부등식을 $[0, x]$에서 적분할 수 있다.

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_0^x \frac{t^q - 1}{q}\,\mathrm{d}t.$$

그런데

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\Big(\frac{x^{p+1}}{p+1} - x\Big) = \frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big),$$

이고 q에 대해서도 마찬가지이다. 따라서

$$\frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{x}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big),$$

이고, $x > 0$으로 나누면(부등호 방향은 그대로이다)

$$\frac{1}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{1}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big).$$

$x = 0$에서 이 부등식은 $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$가 되며, 이것이 참임은 이미 보았다. 이로써 모든 $x \geq 0$에 대한 증명이 끝난다.

검산

- $x = 1$에서 가운데 부등식은 $0 \geq 0$이다. 두 곡선이 그 점에서 만나므로 등호가 성립하는 것과 들어맞는다.
- 마지막 부등식에 $p = 2$, $q = 1$, $x = 3$을 대입하면 좌변은 $\frac{1}{2}(3 - 1) = 1$, 우변은 $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$이므로 $1 \geq \frac{1}{2}$이다.
- $0 < q < p$, $x \geq 0$인 세 수 (p, q, x)를 200,000개 무작위로 골라($x = 0$, $x = 1$, 아주 작은 x 포함) 시험해 보았는데, 두 부등식 어느 쪽에도 반례(counterexample)는 없었다.

흔한 실수

- $x < 1$인데 $[1, x]$에서 적분하면서 부등호 방향을 그대로 두는 것. 부등식을 적분하기 전에 적분 구간의 끝점이 증가하는 순서로 놓여 있어야 한다.
- 끝점 $x = 0$을 빠뜨리는 것. 이 점에서는 t^{q-1}이 정의조차 되지 않을 수 있다.
- 방금 얻은 부등식을 적분하지 않고, 마지막 부분을 미분을 이용해 처음부터 다시 증명하려 하는 것.

STEP 너머

$q \to 0$일 때 $(x^q - 1)/q \to \ln x$이므로, 이 결과는 p가 0으로 감소할 때 $(x^p - 1)/p$가 $\ln x$로 감소함을 보여 준다. 이는 로그(logarithm)에 대한 깔끔한 한계 부등식의 모임이며, 통계학의 Box–Cox 변환(Box–Cox transformation)의 바탕이기도 하다. 적분이 부등식을 보존한다는 원리(적분의 단조성(monotonicity))는 해석학(analysis) 강의에서 리만(Riemann) 적분에 관해 가장 먼저 증명하는 정리 가운데 하나이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.