풀이

STEP II 1997, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP II 1997, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q7

핵심 아이디어

우변은 x^2을 통해서만 x에 의존하므로, 이를 $u = x^2$에 대한 이차식으로 보고 완전제곱식(completing the square)으로 고친다. 그러면 미적분 없이 단 한 줄로 y^2의 최댓값을 얻는다. 개형을 그릴 때는 $x \to -x$나 $y \to -y$로 바꾸어도 방정식이 변하지 않으므로, 제1사분면(first quadrant)만 이해한 뒤 대칭이동하면 된다. 확실히 짚어 둘 곳은 곡선이 축과 만나는 점, 원점에서의 기울기, 그리고 원점이 아닌 곳에서 곡선이 x축과 만나는 점에서의 기울기이다.

풀이

최댓값과 최솟값

$a = 0$이면 방정식은 $y^2 = -x^4$이 되고, 이로부터 $x = y = 0$이어야 한다. 즉 "곡선"은 한 점 $(0,0)$뿐이고, y가 가질 수 있는 값은 0뿐이다. 이제부터는 $a \neq 0$이라 하자. 식에는 a^2만 나타나므로 $a > 0$으로 생각하고 마지막에 $|a|$로 쓰면 된다.

$y^2 \geq 0$이므로 $x^2(a^2 - x^2) \geq 0$, 즉 $x = 0$ 또는 $x^2 \leq a^2$이어야 한다. 따라서 곡선은 띠 영역 $-|a| \leq x \leq |a|$ 안에 놓인다. x^2에 대하여 완전제곱식으로 고치면

$$y^2 = a^2x^2 - x^4 = \frac{a^4}{4} - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4}{4},$$

이고, 등호는 정확히 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$일 때 성립한다. 그러므로 곡선 위 모든 점에서 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$이고, $y = \frac{1}{2}a^2$과 $y = -\frac{1}{2}a^2$은 모두 $x = \pm|a|/\sqrt{2}$에서 실제로 얻어진다. 따라서

$$\boxed{y_{\max} = \frac{a^2}{2}, \qquad y_{\min} = -\frac{a^2}{2}, \qquad \text{위치: } x = \pm\frac{|a|}{\sqrt{2}}.}$$

생각해 보기 이 결과는 미분으로 구한 것과 어떻게 맞아떨어지는가? $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$인 곳은 어디인가?

음함수 미분(implicit differentiation)을 하면 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2)$이다. $y \neq 0$인 곳에서 기울기가 0이 되는 것은 정확히 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$일 때이며(근 $x = 0$에서는 $y = 0$이다), 이것이 바로 위에서 찾은 네 점이다. $y = 0$인 점에서는 y로 나눌 수 없으므로 따로 살펴야 하며, 이는 다음에 다룬다. 두 방법의 결과는 일치하지만, 완전제곱식을 쓰면 정상값(stationary value)이 곧 전체의 최댓값과 최솟값임이 바로 증명된다.

곡선의 모양

$a > 0$이라 하자. y에 대해 풀면 두 갈래

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{그리고} \qquad y = -x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a,$$

를 얻으며, 이 둘은 서로 x축에 대하여 대칭이다. 첫째 갈래에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- **원점에서** 기울기는 a이고, 다른 갈래에서는 $-a$이다. 따라서 곡선은 원점을 두 번 지나며 그곳에서 자기 자신과 교차하고, 접선(tangent)은 $y = \pm ax$이다.
- **$x = \pm a$에서** $y = 0$이고, $x \to a^-$일 때 기울기는 $-\infty$로 발산한다. 따라서 곡선은 $(\pm a, 0)$에서 **수직** 접선을 가지며 x축과 만난다. 그곳에서 곡선은 뾰족하지 않고 매끄럽게 둥글다.
- **그 사이에서** 첫째 갈래는 $(0,0)$에서 올라가 $x = a/\sqrt{2}$에서 최댓값 $\frac{1}{2}a^2$에 이른 뒤 다시 $(a,0)$으로 내려온다. 나머지 사분면은 두 축에 대한 대칭으로부터 얻어진다.

결과는 옆으로 누운 8자 모양(figure of eight)으로, $x \geq 0$과 $x \leq 0$에 고리가 하나씩 있고, 너비는 $2|a|$, 전체 높이는 a^2이다.

곡선 전체를 한눈에 보는 깔끔한 방법은 $x = a\sin t$로 놓는 것이다. 그러면 $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$이므로 $y^2 = a^4\sin^2 t\cos^2 t$이고, 곡선은

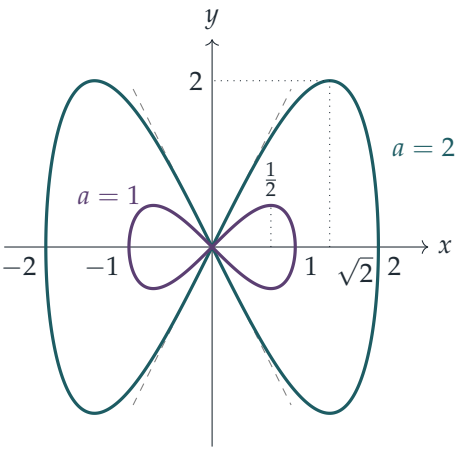
$$x = a\sin t, \qquad y = \tfrac{1}{2}a^2\sin 2t, \qquad 0 \leq t < 2\pi,$$

로 그려진다. 이것으로도 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$임을 다시 알 수 있다.

$a = 1$과 $a = 2$인 경우

	x축과 만나는 점	O에서의 접선	최대·최소 점
$a = 1$	$x = 0,\ \pm 1$	$y = \pm x$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right)$
$a = 2$	$x = 0,\ \pm 2$	$y = \pm 2x$	$\left(\pm\sqrt{2}, \pm 2\right)$

두 곡선의 상대적인 위치를 알아보자. $0 < |x| \le 1$이면 $x^2(1-x^2) < x^2(4-x^2)$이므로, $a = 1$인 곡선은 $a = 2$인 곡선의 엄격히 안쪽에 놓이고, 두 곡선의 공통점은 원점뿐이다. 예를 들어 $x = 1$에서 $a = 1$인 곡선은 $y = 0$에 있지만 $a = 2$인 곡선은 $y = \pm\sqrt{3}$에 있다.



점선은 $a = 2$일 때의 접선 $y = \pm 2x$이다. $a = 1$일 때 원점에서의 접선은 45° 기울어진 $y = \pm x$이다.

검산

- 무작위로 고른 50개의 a 값에 대해 $|x| \le |a|$ 범위에서 격자 탐색을 해 보니, 모든 경우에 $|y|$의 최댓값은 $|x| = |a|/\sqrt{2} \approx 0.7071|a|$에서 $\frac{1}{2}a^2$이었다. $a = 2$이면 $|x| \approx 1.41421$에서 $y_{\max} = 2.000000$을 얻는다.
- 최댓값은 당연히 a^2에 비례한다. (x, y)를 (ax, a^2y)로 바꾸면 $a = 1$인 곡선이 일반적인 곡선으로 바뀌기 때문이다. 따라서 $a = 2$인 곡선은 $a = 1$인 곡선을 가로로 2배, 세로로 4배 늘인 것이고, 그래서 훨씬 더 높다.

흔한 실수

- $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$만 그리는 것. 방정식이 정하는 것은 y^2이므로 y의 두 부호가 모두 그래프에 속하며, 따라서 S자 모양이 아니라 고리 두 개가 생긴다.
- $(\pm a, 0)$에 뾰족한 모서리를 그리는 것. 그곳의 기울기는 무한대이므로 곡선은 x축을 수직으로, 매끄럽게 지난다.
- 곡선이 원점에서 기울기 $\pm a$로 자기 자신과 교차한다는 사실을 잊는 것. 이 기울기가 O 근처에서 두 곡선을 구별해 준다.

STEP 너머

여기서 원점은 **마디점**(node), 즉 대수 곡선(algebraic curve)이 자기 자신과 교차하는 점이다. O 근처에서 방정식은 $y^2 \approx a^2x^2$, 곧 두 직선 $y = \pm ax$처럼 보인다. 이처럼 특이점(singular point)을 최저차 항으로 분류하는 것이 대수 곡선 연구의 첫걸음이다. $x = a\sin t$라는 기법은 이 곡선을 삼각함수로 매개변수화(parametrise)할 수 있음을 보여 준다. 이런 종류의 곡선을 리사주 도형(Lissajous figure)이라 한다(여기서는 진동수의 비가 $1:2$이다). 이와 같은 곡선의 개형 그리기와 STEP식 사고 전반을 더 연습하려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.