풀이

STEP II 1997, 문제 6

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 1997, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q6

핵심 아이디어

모든 것을 $t = \tan\theta$로 나타낸다. 삼배각 공식(triple-angle formula)을 쓰면 주어진 방정식은 t에 대한 삼차방정식(cubic equation)이 되고, 쉬운 근 하나를 찾아내면 남는 이차식(quadratic)이 바로 첫 부분에 나온 식이다. 따라서 그 근들은 $\tan^{-1}(1 \pm \sqrt{2})$의 값을 직접 구하는 대신 배각(double-angle) 조건으로 처리할 수 있다. 코탄젠트(cotangent) 방정식은 같은 방정식이 모습만 바꾼 것이다. 치환(substitution) $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$를 하면 cot이 tan으로 바뀐다.

풀이

첫 번째 결과

$t^2 = 2t + 1$을 만족하는 $t = \tan\phi$를 생각하자. 그러면 $1 - t^2 = -2t$이다. 또한 $t = 0$은 $t^2 = 2t + 1$을 만족하지 않으므로 $t \neq 0$이고, $t^2 \neq 1$이다(그렇지 않으면 $2t = 0$이 된다). 따라서 $\tan 2\phi$가 정의되고

$$\tan 2\phi = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2t}{-2t} = -1,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

역(converse)도 성립하며, 뒤에서 이것이 필요하다. $\tan 2\phi = -1$이면 $2t = -(1 - t^2)$, 즉 $t^2 = 2t + 1$이다. 따라서

$$\tan^2\phi = 2\tan\phi + 1 \iff \tan 2\phi = -1.$$

방정식 $\tan\theta = 2 + \tan 3\theta$

해가 되려면 $\tan\theta$와 $\tan 3\theta$가 모두 정의되어야 한다. $t = \tan\theta$라 하자. 그러면

$$\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

이고, $\tan 3\theta$가 정의되므로 $1 - 3t^2 \neq 0$이다. 따라서

$$\tan\theta - \tan 3\theta = \frac{t(1-3t^2) - (3t - t^3)}{1 - 3t^2} = \frac{-2t - 2t^3}{1 - 3t^2}.$$

이것을 2와 같다고 놓고 양변에 (0이 아닌) $1 - 3t^2$를 곱하면

$$-t - t^3 = 1 - 3t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0.$$

계수의 합이 0이므로 $t = 1$이 근이고,

$$t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t-1)(t^2 - 2t - 1).$$

$t = 1$과 $t = 1 \pm \sqrt{2}$는 모두 $3t^2 = 1$을 만족하지 않으므로, 모든 근이 실제 해를 준다.

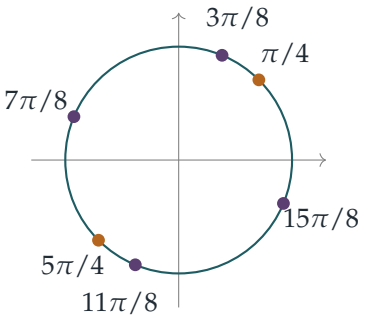
생각해 보기 $\tan\theta = 1 \pm \sqrt{2}$를 어떻게 π의 유리수배(rational multiple)로 바꿀 수 있을까?

첫 부분을 이용한다. $t^2 - 2t - 1 = 0$의 근은 정확히 $t^2 = 2t + 1$을 만족하는 $\tan\theta$의 값들이고, 위의 동치 관계에 의해 이것은 정확히 $\tan 2\theta = -1$을 만족하는 θ들이다.

- $\tan\theta = 1$: $\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$이다. $(0, 2\pi)$에서 이것은 $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$를 준다.
- $\tan 2\theta = -1$: $2\theta = \frac{3\pi}{4} + n\pi$이므로 $\theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$이다. 여기서 2θ는 $(0, 4\pi)$ 전체를 움직이므로 $n = 0, 1, 2, 3$이고 $\theta = \frac{3\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$, $\frac{15\pi}{8}$이다.

(예를 들어 $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$이고 $\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$이다.) 따라서 $0 < \theta < 2\pi$에서의 해는

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$$



호박색 점은 $\tan\theta = 1$에서 나오고, 서로 사분의 일 바퀴씩 떨어진 자주색 점은 $\tan 2\theta = -1$에서 나온다.

방정식 $\cot\theta = 2 + \cot 3\theta$

> **생각해 보기** cot으로 계산 전체를 다시 해야 할까?

그렇지 않다. $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$로 놓자. 그러면 $\cot\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \tan\psi$이다. 또한 cot의 주기(period)가 π라는 사실을 이용하면

$$\cot 3\theta = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - 3\psi\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 3\psi\right) = \tan 3\psi,$$

이다. 각 변은 대응하는 tan이 정의될 때 정확히 정의된다. 따라서 방정식은

$$\tan\psi = 2 + \tan 3\psi,$$

가 되고, 이것은 앞의 방정식이다. 범위 $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$는 $0 < \psi < 2\pi$가 되는데, 이는 정확히 앞의 범위이다. 따라서 ψ는 위에서 구한 여섯 값을 가지며, $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$로부터

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{8}, -\frac{11\pi}{8}.$$

검산

- $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때: $\tan 3\theta = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$이고, $2 + (-1) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$이다. $\theta = \frac{3\pi}{8}$일 때: $\tan\frac{9\pi}{8} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$이고, $2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{3\pi}{8}$이다.
- t에 대한 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이고 tan의 주기는 π이므로, 길이가 2π인 구간에서 해는 많아야 $3 \times 2 = 6$개일 것으로 예상된다. 실제로 여섯 개를 찾았다.
- 수치적으로 $(0, 2\pi)$에서 촘촘한 격자 위로 $\tan x - \tan 3x - 2$를 훑어보면, (극(pole)에서 떨어진 곳에서) 부호가 바뀌는 곳은 $x = \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$뿐이다. 코탄젠트 방정식에 대해 같은 방법으로 훑어보면 정확히 위에 나열한 여섯 값이 나온다.

흔한 실수

- $\tan 2\theta = -1$에서 $n = 0, 1$만 쓰고 멈추는 것. θ가 $(0, 2\pi)$를 움직이므로 2θ는 $(0, 4\pi)$를 움직이고, 따라서 해는 두 개가 아니라 네 개이다.
- 확인하지 않고 어떤 식으로 나누어서 근 $t = 1$을 잃어버리거나, $\frac{5\pi}{4}$를 빠뜨리는 것.
- 마지막 부분을 처음부터 다시 풀다가 범위를 잘못 잡는 것. 치환은 주어진 구간을 정확히 $(0, 2\pi)$로 옮기며, 이는 우연이 아니다.

STEP 너머

항등식 $\tan 3\theta = (3t - t^3)/(1 - 3t^2)$는 $(1 + \mathrm{i}t)^3$의 실수부와 허수부에서 나오며, 일반적으로 $\tan n\theta$는 $(1 + \mathrm{i}t)^n$에서 읽어 낼 수 있는 $\tan\theta$에 대한 다항식들의 비이다. 이 다항식들의 근은 π의 유리수배의 탄젠트 값이고, 그래서 여기의 $t^2 - 2t - 1$처럼 그 인수분해(factorisation)가 그렇게 깔끔한 것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 배각 공식들이 복소수 곱셈의 기하에서 어떻게 자연스럽게 나오는지 보여준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.