풀이

STEP II 1997, 문제 5

순수수학 • 복소 지수 사상

STEP II 1997, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s2-q5

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.7 절 **사상으로서의 복소 지수함수**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/complex-exponential.html

핵심 아이디어

주어진 관계식은 $z = \mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{w}$를 절댓값–편각 꼴(modulus–argument form)로 쓴 것에 지나지 않는다. 즉 u는 z의 절댓값을, v는 z의 편각을 결정한다. 이 점을 알아차리면 모든 소문항이 극좌표(polar coordinates)에 관한 문제가 된다. 유일하게 미묘한 점은 편각이 2π의 정수배 차이를 무시해야만 정의된다는 것이다. 그래서 이 사상은 다대일(many-to-one)이고, 일대일 대응(one-to-one correspondence)을 얻으려면 u–v 평면을 알맞은 높이의 가로띠로 잘라 내야 하며, 이때 어느 경계를 포함할지 주의해야 한다.

풀이

$z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$일 때 w 구하기

$\mathrm{e}^{u} > 0$이고 $|\cos v + \mathrm{i}\sin v| = 1$이므로, 관계식은 다음을 뜻한다.

$$|z| = \mathrm{e}^{u}, \qquad \arg z = v \pmod{2\pi}.$$

$z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$이면 $|z| = \mathrm{e}$이고 $\arg z = \frac{\pi}{2}$이다. 따라서 $\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}$에서 $u = 1$이고(실수 지수함수는 일대일이다), $\cos v + \mathrm{i}\sin v = \mathrm{i}$에서 $\cos v = 0$, $\sin v = 1$이므로 $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$이다. 그러므로

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

이러한 w는 무수히 많으며, 세로 직선 $u = 1$ 위에 2π 간격으로 놓여 있다.

직선 $u = $ 상수의 상

직선 $u = c$ 위에서 점 z의 절댓값은 e^c, 편각은 v이다. v가 모든 실수를 지나는 동안 $\cos v + \mathrm{i}\sin v$는 단위원을 (무한히 여러 번) 돌므로, z가 그리는 자취는 다음과 같다.

$$\text{원} x^2 + y^2 = \mathrm{e}^{2c}, \quad \text{중심} O, \text{ 반지름} \mathrm{e}^c.$$

c가 클수록 원이 커진다. $c = 0$이면 단위원이다. $c \to -\infty$이면 원은 O를 향해 줄어들지만, $\mathrm{e}^c > 0$이므로 결코 O에 이르지 않는다.

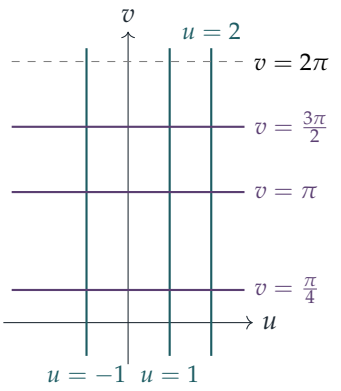
직선 $v = $ 상수의 상

직선 $v = c$ 위에서는 $z = \mathrm{e}^u(\cos c + \mathrm{i}\sin c)$이고, 이는 고정된 단위벡터 $(\cos c, \sin c)$의 양수 배이다. u가 $\mathbb{R}$ 전체를 지나는 동안 배수 e^u는 $(0, \infty)$의 모든 값을 정확히 한 번씩 취한다. 따라서 상은 다음과 같은 반직선(half-line)이다.

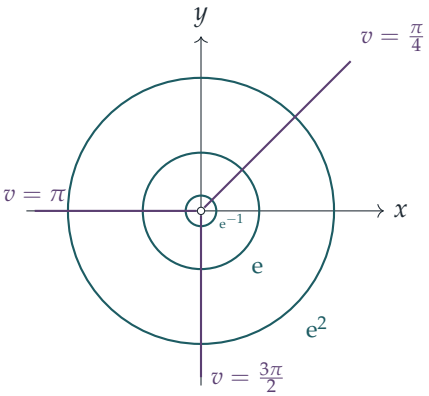
점 O에서 출발하여 각 c를 이루는 반직선(각은 양의 x축에서 잰다), 단 O 자체는 제외한다.

직선 $v = c$와 $v = c + 2k\pi$는 같은 반직선을 준다. 예를 들어 직교좌표로 쓰면, $v = \frac{\pi}{4}$는 $x > 0$인 $y = x$를 주고, $v = \pi$는 음의 x축을 준다.

아래 그림은 u–v 평면의 격자선과 그 상을 보여 준다. 세로 직선은 원이 되고, 가로 직선은 반직선이 된다.



u–v 평면



x–y 평면

(원은 실제 비율대로 그리지 않았다. 반지름 e^{-1}, e, e^2은 매우 빠르게 커진다. 속이 빈 원은 결코 도달하지 않는 점 O를 나타낸다.)

제1사분면과 일대일 대응인 부분집합

점 z가 열린 제1사분면(first quadrant)에 속할 필요충분조건은 $z \neq 0$이고 z의 편각 가운데 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이(양 끝 제외)에 있는 것이 존재하는 것이다. 다음과 같이 잡자.

$$W_1 = \left\{(u,v) : u \in \mathbb{R},\ 0 < v < \tfrac{\pi}{2}\right\}, \qquad W_2 = \left\{(u,v) : u \in \mathbb{R},\ 2\pi < v < \tfrac{5\pi}{2}\right\}.$$

W_1에서는 $\mathrm{e}^u \cos v > 0$이고 $\mathrm{e}^u \sin v > 0$이므로, W_1의 모든 점은 제1사분면으로 옮겨진다. 역으로, 제1사분면의 점 z에 대해 $z = \mathrm{e}^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$가 성립할 필요충분조건은 $u = \ln|z|$이고 $v = \theta + 2k\pi$인 것이다. 여기서 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$는 z의 주편각(principal argument)이다. 이 값들 가운데 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하는 것은 $k = 0$인 경우 하나뿐이므로, z는 W_1에 정확히 하나의 원상(preimage)을 가진다. 따라서 W_1은 제1사분면과 일대일 대응이다. W_1을 위로 2π만큼 평행이동한 W_2에 대해서도 $k = 1$로 같은 논증이 성립한다.

(임의의 띠 $\{2k\pi < v < 2k\pi + \frac{\pi}{2}\}$를 택해도 똑같이 된다.)

$0 < |z| < 1$과 일대일 대응인 부분집합

이번에는 $|z| = \mathrm{e}^u < 1$, 즉 $u < 0$이어야 하고, 모든 편각이 정확히 한 번씩 나타나야 하므로 v는 길이가 정확히 2π인 구간을 지나야 한다.

> **생각해 보기** 띠는 위쪽 경계를 포함해야 할까, 아래쪽 경계를 포함해야 할까? 둘 다일까, 둘 다 아닐까?

정확히 하나만 포함해야 한다. 둘 다 포함하여 예컨대 $0 \le v \le 2\pi$로 잡으면, $(u,0)$과 $(u,2\pi)$가 모두 양의 실수축 위의 같은 점 e^u로 옮겨지므로 대응이 일대일이 되지 못한다. 둘 다 포함하지 않으면 양의 실수축에는 전혀 도달하지 못한다. 한쪽 경계만 포함하면 모든 편각이 정확히 한 번씩 나타난다. 따라서 다음과 같이 잡는다.

$$W_3 = \{(u,v) : u < 0,\ 0 \le v < 2\pi\}, \qquad W_4 = \{(u,v) : u < 0,\ -\pi < v \le \pi\}.$$

W_3의 경우: $0 < |z| < 1$이면 $u = \ln|z| < 0$으로 정해지고, z의 편각 $\theta + 2k\pi$ 가운데 $[0, 2\pi)$에 속하는 것은 정확히 하나이다. 이 구간은 길이가 2π이고 두 끝점 중 하나만 포함하기 때문이다. 따라서 이러한 z는 각각 W_3에 정확히 하나의 원상을 가지며, W_3의 각 점은 $0 < \mathrm{e}^u < 1$인 z로 옮겨진다. W_4의 경우에는 주편각에 해당하는 구간 $(-\pi, \pi]$로 같은 논증이 성립한다. 두 집합 모두 반평면 $u < 0$을 높이 2π인 반열린 띠로 잘라 낸 것이다.

검산

- $u = 1, v = \frac{\pi}{2} + 2\pi$를 대입하면 $z = \mathrm{e}(\cos\frac{5\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{2}) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$로, 요구한 대로이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 수천 개의 (u,v)에 대해 $|z| = \mathrm{e}^u$이고 $\arg z \equiv v$임을 10^{-9} 이내의 오차로 확인했다. 각 목표 집합에서 무작위로 고른 점들에 대해, $W_1, \ldots, W_4$

각각에 원상이 정확히 하나씩 있음을 확인했다. 또 점 $(-1,0)$과 $(-1,2\pi)$는 모두 $z = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$를 주므로, 닫힌 띠를 쓰면 중복으로 세게 됨을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $w = 1 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$만 답하고 $+2k\pi$를 빠뜨리는 것.
- 상에 원점을 포함하는 것: e^u는 결코 0이 아니므로, 원은 한 점으로 줄어들지 않고 반직선은 제외된 점에서 시작한다.
- W_3으로 닫힌 띠 $0 \le v \le 2\pi$(또는 열린 띠 $0 < v < 2\pi$)를 쓰는 것: 앞의 것은 양의 실수축을 중복으로 세고, 뒤의 것은 양의 실수축을 놓친다.

STEP 너머

여기서 다룬 사상은 복소 지수함수(complex exponential) $w \mapsto \mathrm{e}^w$이다. 이 함수는 직교좌표의 격자선을 극좌표의 격자선으로 옮기며, 주기가 $2\pi\mathrm{i}$인 주기함수(periodic function)이다. 이 함수가 일대일이 되는 띠를 고르는 것은 곧 그 역함수인 **복소 로그의 분지**(*branch of the complex logarithm*)를 고르는 것과 같다. 빼놓은 경계가 바로 **분지 절단**(*branch cut*)이며, 이것이 $\log z$를 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 전체에서 연속으로 정의할 수 없는 이유를 설명해 준다. Tristan Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 이 사상과 등각 사상(conformal map) 일반에 관한 아름다운 그림들이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.