풀이

STEP II 1997, 문제 3

순수수학 • 부분분수를 이용한 적분

STEP II 1997, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s2-q3

핵심 아이디어

분모에 있는 두 이차식(quadratic)을 곱하면 x^4+4가 된다. 이것은 전형적인 "변장한 제곱의 차(difference of two squares)"로, $x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$이다. 일단 부분분수(partial fractions)로 분해하고 나면 각 조각은 표준적인 적분이 된다. 각 분자를 그 분모의 도함수(derivative)의 상수배와 상수의 합으로 나눈다. 앞부분은 적분하면 로그가 되고, 뒷부분은 완전제곱식으로 고치면(completing the square) 아크탄젠트(arctangent)가 된다.

풀이

부분분수

먼저

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=(x^2+2)^2-(2x)^2=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4.$$

임에 주목한다. 따라서 구하는 항등식의 양변에 x^4+4를 곱하면, 다음이 성립해야 한다.

$$(ax+b)(x^2-2x+2)+(cx+d)(x^2+2x+2)=1 \quad \text{모든} x.$$

좌변을 전개하면

$$(a+c)x^3+(b-2a+d+2c)x^2+(2a-2b+2c+2d)x+(2b+2d).$$

이다. 상수 다항식 1과 계수를 비교(comparing coefficients)하면

$$\begin{aligned} x^3: &\quad a+c=0,\\ x^2: &\quad b+d-2a+2c=0,\\ x^1: &\quad 2(a+c)+2(d-b)=0,\\ x^0: &\quad 2(b+d)=1. \end{aligned}$$

첫째 식과 셋째 식에서 $c=-a, d=b$를 얻는다. 그러면 넷째 식에서 $b=d=\frac{1}{4}$이다. 마지막으로 둘째 식은 $\frac{1}{2}-4a=0$이 되므로 $a=\frac{1}{8}$이다. 따라서

$$a=\tfrac{1}{8}, \qquad b=\tfrac{1}{4}, \qquad c=-\tfrac{1}{8}, \qquad d=\tfrac{1}{4},$$

즉

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{8}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2-x}{x^2-2x+2}\right).$$

이다. ($c=-a$와 $d=b$는 아무 계산 없이도 예측할 수 있었다. x를 $-x$로 바꾸면 $\frac{1}{x^4+4}$는 변하지 않고 두 분모는 서로 바뀌기 때문이다.)

적분

생각해 보기 $\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$는 어떻게 적분하는가?

분모의 도함수는 $2x+2$이다. 그래서 분자를 $2x+2$의 상수배와 나머지의 합으로 쓴다.

$$x+2=\tfrac{1}{2}(2x+2)+1, \qquad 2-x=-\tfrac{1}{2}(2x-2)+1.$$

완전제곱식으로 고치면 $x^2\pm 2x+2=(x\pm 1)^2+1$이다. 따라서

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}.$$

두 이차식 모두 모든 실수 x에 대하여 양수이므로, 모든 항은 $[0,1]$에서 연속이다. 앞의 두 항은 $f>0$인 f'/f 꼴이므로 적분하면 $\ln f$가 된다. 뒤의 두 항은 적분하면 아크탄젠트가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} &= \frac{1}{16}\Big[\ln(x^2+2x+2)-\ln(x^2-2x+2)\Big]_0^1+\frac{1}{8}\Big[\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{16}[(\ln 5-\ln 1)-(\ln 2-\ln 2)]\\ &\quad +\frac{1}{8}[(\tan^{-1}2+\tan^{-1}0)-(\tan^{-1}1+\tan^{-1}(-1))]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}[\tan^{-1}2-(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4})]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\tan^{-1}2, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. $\ln 2$ 항들과 $\frac{\pi}{4}$ 항들이 둘씩 상쇄되는데, 이는 앞에서 발견한 대칭성에서 비롯된 기분 좋은 결과이다.

검산

- $x = 0$에서 부분분수는 $\frac{1}{8}\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{0+4}$를 준다. $x = 1$에서는 $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{5}$를 주는데, 이 역시 맞다.
- 피적분함수는 $[0, 1]$에서 $\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{5}$로 감소하므로, 적분값은 0.2와 0.25 사이에 있어야 한다. 수치로 계산하면 $\frac{1}{16}\ln 5 + \frac{1}{8}\tan^{-1} 2 \approx 0.100589 + 0.138394 = 0.238983$이다. 이 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.2389834593을 얻으며, 유효숫자 약 16자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 실근을 찾아서 $x^4 + 4$를 실수 범위에서 인수분해하려는 것. 실근이 없으므로 인수는 이차식이어야 한다. $4x^2$을 더하고 빼서 완전제곱식을 만드는 것이 요령이다.
- 아크탄젠트 항의 아래끝을 빠뜨리는 것. $\tan^{-1}(0+1) = \frac{\pi}{4}$와 $\tan^{-1}(0-1) = -\frac{\pi}{4}$는 둘 다 포함했을 때에만 상쇄된다.

STEP 너머

인수분해 $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$는 소피 제르맹(Sophie Germain)의 항등식 $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$이다. 예를 들어 이 항등식으로부터 $n^4 + 4$는 $n = 1$일 때에만 소수(prime)임을 알 수 있다. 더 일반적으로, 복소근은 켤레(conjugate) 쌍으로 나타나므로 모든 실계수 다항식은 실계수 일차식과 이차식의 곱으로 인수분해된다. 따라서 부분분수, 그리고 이를 통한 로그와 아크탄젠트만으로 모든 유리함수(rational function)를 적분할 수 있다. 경로적분(contour integration)을 이용하면 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} = \frac{\pi}{4}$를 거의 계산 없이 구할 수 있다. 그 이유는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 설명되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.