풀이

STEP II 1997, 문제 2

순수수학 • 점화식

> **STEP II 1997, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q2

핵심 아이디어

이 연쇄 등식은 사실 점화식(recurrence)이 모습을 바꾼 것이다. 각 고리는 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$이라는 뜻이므로, 각 항이 다음 항을 결정한다. 처음 몇 항을 분수로 계산하고 분자와 분모를 유심히 살펴보자. 곧 2의 거듭제곱이 나타나고, 일단 추측을 세우면 점화식이 수학적 귀납법(induction)에 필요한 단계를 정확히 제공한다.

풀이

규칙 찾기

연쇄 등식을 한 번에 하나씩 읽으면

$$\frac{2}{x_1} = 3 \qquad \text{그리고} \qquad x_n + \frac{2}{x_{n+1}} = 3 \quad (n \geq 1),$$

이므로

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}.$$

이다. (이 점화식은 $x_n \neq 3$일 때만 의미가 있다. 모든 x_n이 0과 1 사이에 있음을 곧 보게 된다.) 처음 몇 항을 계산하면 다음과 같다.

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{7}, \qquad x_3 = \frac{2}{3 - \frac{6}{7}} = \frac{14}{15}, \qquad x_4 = \frac{2}{3 - \frac{14}{15}} = \frac{30}{31}.$$

분모 $3, 7, 15, 31$은 각각 2의 거듭제곱보다 1 작은 수, 즉 $2^{n+1} - 1$이고, 각 분자는 분모보다 1 작다. 따라서 다음과 같이 추측한다.

$$x_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

귀납법에 의한 증명

$P(n)$을 명제 $x_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$이라 하자.

기저 단계(base case). $n = 1$일 때 공식은 $\frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3} = x_1$을 주므로 $P(1)$은 참이다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $P(k)$가 참이라고 가정하자. 계산을 깔끔하게 하기 위해 $N = 2^{k+1}$로 두면 $x_k = \dfrac{N-2}{N-1}$이다. 그러면

$$3 - x_k = \frac{3(N-1)-(N-2)}{N-1} = \frac{2N-1}{N-1},$$

이고, 이 값은 0이 아니다(실제로 $x_k < 1$이므로 2보다 크다). 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$x_{k+1} = \frac{2}{3-x_k} = \frac{2(N-1)}{2N-1} = \frac{2N-2}{2N-1}.$$

> **생각해 보기** 왜 이것이 $n = k+1$일 때의 공식인가?

$2N = 2^{k+2} = 2^{(k+1)+1}$이기 때문이다. 따라서

$$x_{k+1} = \frac{2^{(k+1)+1}-2}{2^{(k+1)+1}-1},$$

이고, 이것은 정확히 $P(k+1)$이다.

$P(1)$이 참이고 모든 $k \geq 1$에 대하여 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$이므로, 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$은 참이다. 이로써 모든 n에 대하여 $0 < x_n < 1$임도 확인되므로, 분모 $3 - x_n$은 결코 0이 되지 않는다.

"다른 방법": 선형화

추측한 공식을 직접 **유도**할 수도 있다. $x_{n+1} = 2/(3-x_n)$ 꼴의 점화식은 0이 아닌 항으로 이루어진 새로운 수열 (a_n)에 대하여 $x_n = 2a_n/a_{n+1}$로 놓으면 선형(linear)이 된다. 대입하면

$$\frac{2a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{2}{3-\frac{2a_n}{a_{n+1}}} = \frac{2a_{n+1}}{3a_{n+1}-2a_n}, \qquad \text{따라서} \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

특성방정식(auxiliary equation) $t^2 - 3t + 2 = 0$의 근은 1과 2이므로 $a_n = A + B \cdot 2^n$이다. $a_1 = 1$(a의 배율은 자유롭게 정할 수 있다)과 $a_2 = 3$($x_1 = 2a_1/a_2 = \frac{2}{3}$이 되도록)으로 잡으면 $a_n = 2^n - 1$이고, 따라서 $x_n = \dfrac{2(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$으로 같은 공식을 얻는다.

검산

- 공식에 $n = 0$을 넣으면 $x_0 = 0$이 되는데, 실제로 첫 번째 등식 $3 = 2/x_1$은 일반적인 고리 $x_0 + 2/x_1 = 3$에서 $x_0 = 0$인 경우이다. 깔끔한 일관성 검사이다.
- $n \to \infty$일 때 $x_n \to 1$이다. 점화식의 극한 L은 $L = 2/(3 - L)$, 즉 $L^2 - 3L + 2 = 0$을 만족해야 하므로 $L = 1$ 또는 $L = 2$이고, 우리 수열이 아래에서 다가가는 것은 1이다.
- $x_1 = \frac{2}{3}$에서 시작하여 $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$을 정확한 분수로 반복 계산하면 40 이하의 모든 n에 대하여 공식과 일치한다. 예를 들어 $x_5 = \frac{62}{63}$이다.

흔한 실수

- 연쇄 등식을 잘못 읽는 것: 등식은 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$이지 $x_{n+1} + 2/x_n = 3$이 아니다. 이를 틀리면 다른 수열이 나온다.
- "규칙이 계속된다"에서 멈추는 것. 문제는 증명을 요구하며, 몇 개의 항은 단지 증거일 뿐이다.
- 귀납 단계에서 $2 \cdot 2^{k+1}$을 $2^{(k+1)+1}$로 고쳐 쓰는 것을 잊어, 결론이 명제 $P(k+1)$임이 눈에 보이지 않게 되는 것.

STEP 너머

$x_{n+1} = (ax_n + b)/(cx_n + d)$ 꼴의 점화식은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 반복이며, "다른 방법"에서처럼 언제나 선형화할 수 있다. 이와 동치로, 2×2 행렬(matrix) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 거듭제곱을 추적할 수도 있는데, 이 행렬의 고윳값(eigenvalue, 여기서는 1과 2)이 장기적인 거동을 결정한다. 고정점(fixed point) 1과 2는 각각 끌어당기는 점과 밀어내는 점이며, 이 때문에 수열이 1에 안착한다. 행렬의 관점에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를, 수열의 수렴(convergence) 일반에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.