풀이

STEP II 1997, 문제 14

확률과 통계 • 푸아송 과정

> **STEP II 1997, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q14

핵심 아이디어

역학처럼 보이는 상황이지만, 이 문제는 사실 푸아송 과정(Poisson process) 문제이다. 운동학(kinematics)은 어떤 차량을 세어야 하는지만 알려 준다. 더 빠른 차량이 터널 안에서 나를 따라잡으려면, 내가 들어간 뒤 일정한 시간이 지나기 전에 진입해야 한다. 이 경계 시간만 알면 나머지는 모두 푸아송 개수에 관한 문제가 된다. 후반부에서는 각 차량에 빠름 또는 느림이라는 표지를 무작위로 붙이면 하나의 푸아송 흐름이 서로 독립인(independent) 두 푸아송 흐름으로 나뉜다는 사실을 이용한다. 또한 느린 차량 한 대가 그 뒤의 모든 빠른 차량으로부터 나를 막아 준다는 점도 알아차려야 한다.

풀이

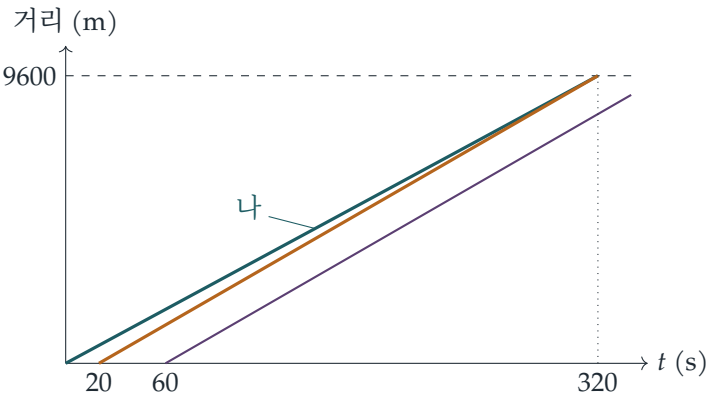
풀이 전체에서 차량을 입자로 모형화한다(차량의 길이는 무시한다). 따라서 앞차를 따라잡은 차량은 그때부터 그냥 앞차의 속력으로 달린다. 시간 t는 내가 진입한 순간부터 초 단위로 잰다. 차량은 분당 6대, 즉 초당 0.1대의 비율로 진입하므로, 길이가 τ초인 임의의 구간에 진입하는 차량의 수는 $\mathrm{Po}(0.1\tau)$를 따르고, 서로 겹치지 않는 구간의 개수들은 독립이다.

첫 번째 부분: 누가 나를 따라잡을 수 있는가?

나는 터널을 통과하는 데 $9600/30 = 320\,\mathrm{s}$가 걸린다. 시각 $t > 0$에 진입하는 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$의 차량을 생각하자. 이 차량이 나를 따라잡기 전까지, 시각 s에서 내가 들어간 거리는 $30s$이고 그 차량이 들어간 거리는 $32(s-t)$이다. 두 값은 $2s = 32t$, 즉 $s = 16t$일 때 같아지며, 이때의 위치는 터널 안으로 $480t$미터 들어간 지점이다. 따라서 그 차량이 내가 터널을 빠져나가기 전에 나를 따라잡을 필요충분조건은

$$480t \le 9600 \iff t \le 20.$$

이다. (같은 말로, 그 차량은 터널을 통과하는 데 $9600/32 = 300\,\mathrm{s}$가 필요하므로, 나보다 늦지 않게 출구에 도달할 필요충분조건은 $t + 300 \leq 320$이다.)



위의 거리–시간 그래프는 나(청록색), $t = 20$에 진입한 빠른 차량(호박색), $t = 60$에 진입한 빠른 차량(자주색)을 보여 준다. 호박색 차량은 우리 둘이 출구에 도달하는 바로 그 순간 나와 만난다. 자주색 차량처럼 그보다 늦게 진입한 빠른 차량은 내가 터널을 나설 때 여전히 내 뒤에 있다.

다른 모든 차량은 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 달리므로, $(0, 20]$에 진입한 차량이 나에게 도달하기 전에 그 차량을 가로막을 것은 없다. 그 차량 앞에 있는 차량은 나를 제외하면 모두 역시 나에게 도달할 때까지 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 달리기 때문이다. 나보다 먼저 진입한 차량은 내 앞에 있으므로 상관이 없다. 따라서 내가 터널을 나설 때 내 뒤의 대기열은 정확히 $(0, 20]$에 진입한 차량들로 이루어지고, 그 수는 $\mathrm{Po}(0.1 \times 20) = \mathrm{Po}(2)$를 따른다. 내 뒤 대기열에 있는 차량 수의 기댓값은

$$\boxed{2}.$$

이다.

두 번째 부분: 정확히 두 대가 진입하여 나를 따라잡는 경우

이제 다른 각 차량은 다른 모든 것과 독립적으로 확률 $\frac{1}{2}$로 빠르거나$(32\,\mathrm{m\,s^{-1}})$ 느리다$(30\,\mathrm{m\,s^{-1}})$.

? **생각해 보기** 20초 안에 진입한 빠른 차량은 여전히 모두 나를 따라잡는가?

그렇지 않다. 시각 $t' > 0$에 진입한 느린 차량은 내 뒤로 $30t'$미터의 일정한 간격을 유지하므로 결코 나를 따라잡지 못한다. 그 뒤에 진입한 빠른 차량은 그 느린 차량을 따라잡거나(또는 그 뒤의 무언가에 막히거나) 그때부터 $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$에 묶이므로, 역시 결코 나에게 도달하지 못한다. 따라서 $(0, 20]$에 진입한 차량이 나를 따라잡을 필요충분조건은 그 차량이 빠르고,

동시에 나와 그 차량 사이에 진입한 모든 차량이 빠른 것이다. $t = 20$ 이후에 진입한 빠른 차량은 앞을 가로막는 것이 없더라도 나를 따라잡을 수 없다.

$(0, 20]$에 진입하는 차량의 수를 $K \sim \mathrm{Po}(2)$라 하자. 이 부분의 사건은 그 구간에 정확히 두 대가 진입하고 두 대 모두 나를 따라잡는 것이다. 이를 위해서는 $K = 2$이고 두 차량이 모두 빨라야 한다.

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(K = 2) \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{2^2 \mathrm{e}^{-2}}{2!} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}} \approx 0.0677.$$

마지막 부분: 정확히 두 대가 내 뒤에 줄 서는 경우

이제 처음 20초 동안 몇 대의 차량이든 진입할 수 있다. $(0, 20]$에 진입한 K대의 차량을 진입 순서대로 나열하자. 앞의 논증에 따르면, 출구에서 내 뒤의 대기열은 이 목록의 맨 앞에서부터 끊기지 않고 이어지는 빠른 차량들이다. ($t = 20$ 이후에 진입한 차량은 결코 나를 따라잡을 수 없으므로 대기열에 합류할 수 없다.) 따라서 대기열에 정확히 두 대가 있을 필요충분조건은 다음 중 하나이다.

- $K = 2$이고 두 대 모두 빠르다. $K = 2$일 때 이 확률은 $\frac{1}{4}$이다.
- $K \geq 3$이고 처음 두 대는 빠르며 세 번째 차량은 느리다. $K = k \geq 3$일 때 이 확률은 $\frac{1}{8}$이다.

그러므로

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{두 대의 대기열}) &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}(K = 2) + \tfrac{1}{8}\,\mathrm{P}(K \geq 3) \\
&= \tfrac{1}{4} \cdot 2\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2} \\
&= \boxed{\tfrac{1}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)} \approx 0.108.
\end{aligned}$$

이 값은 앞의 답보다 크며, 당연히 그래야 한다. 앞의 사건은 두 대의 대기열이 생기는 여러 방법 가운데 하나이기 때문이다.

> 깔끔한 다른 방법: 흐름을 빠른 차량과 느린 차량으로 나누면, 각각 비율 $0.05\,\mathrm{s}^{-1}$인 독립인 두 푸아송 과정이 된다. 정확히 두 대의 대기열이란 처음 20초 동안 처음 두 번의 도착이 빠른 차량이고 그다음 도착이 (있다면) 느린 차량이라는 뜻이다. 표지가 붙은 사건을 다루는 푸아송 문제에서는 이렇게 두 흐름으로 생각하는 것이 가장 빠른 길인 경우가 많다.

검산

- 극한의 경우: 모든 차량이 느리다면 아무도 나를 따라잡을 수 없고, 실제로 빠를 확률이 0일 때 대기열 공식은 0을 준다.
- 빠를 확률을 $\frac{1}{2}$ 대신 p로 두면, 같은 논증으로 $p^2\mathrm{P}(K=2)+p^2(1-p)\mathrm{P}(K\geq 3)$를 얻는다. $p=1$이면 이 값은 $\mathrm{P}(K=2)=2\mathrm{e}^{-2}$이고, 이는 대기열의 길이가 정확히 $\mathrm{Po}(2)$를 따르는 첫 번째 부분과 일치한다.
- 추월이 없는 교통 상황을 4×10^5번 시뮬레이션하였다. 그 결과 첫 번째 부분의 평균 대기열은 2.003이었고, 두 번째 부분의 확률은 0.0674와 0.1076으로, 정확한 값 0.0677과 0.1081에 가까웠다.

흔한 실수

- 느린 차량 한 대가 그 뒤의 모든 빠른 차량으로부터 나를 막아 준다는 점을 잊고, 마지막 부분의 답을 $\mathrm{P}(\text{정확히 두 대가 빠름, 20 s 동안})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$로 쓰는 것.
- 시간은 초 단위인데 비율은 분당 6대를 그대로 쓰는 것: 20초 동안의 평균은 120이 아니라 2이다.
- 아무 때나 진입한 차량으로 대기열이 늘어난다고 가정하는 것: 처음 20초 안에 진입한 차량만 나에게 도달할 수 있다.

STEP 너머

두 번째 부분은 **솎아내기**(thinning)를 이용한다. 비율 λ인 푸아송 과정의 각 사건을 독립적으로 확률 p로 남기면, 남긴 사건과 버린 사건은 각각 비율 $p\lambda$와 $(1-p)\lambda$인 독립인 푸아송 과정을 이룬다. 추월할 수 없는 차량들의 대기열은 교통류 이론(traffic flow theory)의 고전적인 모형이며, 그 이론에서 느린 차량은 여기서 본 것과 같은 "차량군(platoon)"을 만들어 낸다. 푸아송 과정과 솎아내기에 대해서는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.