풀이

STEP II 1997, 문제 11

역학 • 포물체 운동

STEP II 1997, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

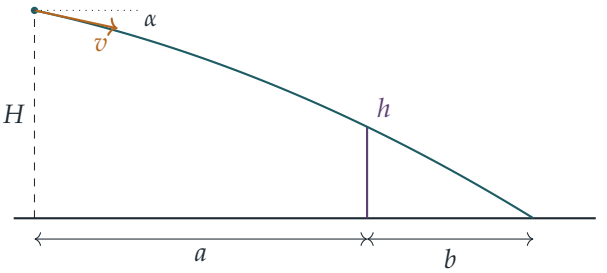
step.maths.org/questions/97-s2-q11

핵심 아이디어

공의 궤적(trajectory)을 수평으로 이동한 거리에 대하여 서브하는 사람의 높이에서 아래로 떨어진 정도를 나타내는 식으로 쓴다. 그러면 주어진 두 사실(공이 a만큼 갔을 때 높이가 h이고, $a+b$만큼 갔을 때 높이가 0이다)은 두 미지수 v와 α에 대한 두 방정식이 된다. 부등식으로 주어지는 범위는 이 방정식들의 해가 언제 실제로 물리적인 의미를 갖는지 따져 보면 얻어진다.

풀이

공을 공기 저항(air resistance)이나 회전 없이 중력만 받으며 움직이는 질점(particle)으로 모형화한다. 원점을 공을 치는 지점 바로 아래의 지면에 잡고, x축은 네트를 향하는 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡는다.



v^2에 대한 식

처음 속도는 $(v\cos\alpha, -v\sin\alpha)$이다. 시간 t가 지난 뒤

$$x = vt\cos\alpha, \qquad y = H - vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(v\cos\alpha)$를 대입하여 t를 소거하고 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 이용하면

$$y = H - x\tan\alpha - \frac{gx^2(1+\tan^2\alpha)}{2v^2}. \qquad (*)$$

편의상 $T = \tan\alpha$, $k = \dfrac{g(1+T^2)}{2v^2}$로 두면 $y = H - xT - kx^2$이다.
공은 $x = a + b$에 떨어지므로, 그 지점에서 $y = 0$을 대입하면

$$0 = H - (a+b)T - k(a+b)^2 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{H-(a+b)T}{(a+b)^2}. \qquad (1)$$

k를 원래 정의로 되돌리고 v^2에 대하여 정리하면

$$v^2 = \frac{g(a+b)^2(1+\tan^2\alpha)}{2[H-(a+b)\tan\alpha]},$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다.

$\tan\alpha$에 대한 식

공은 네트를 아슬아슬하게 넘어가므로 $x = a$에서 $y = h$이다. $(*)$에서

$$H - h = aT + ka^2.$$

(1)의 k를 대입하고 양변에 $(a+b)^2$을 곱하면

$$\begin{aligned}(H-h)(a+b)^2 &= aT(a+b)^2 + a^2\big[H-(a+b)T\big]\\ &= aT(a+b)\big[(a+b)-a\big] + a^2H\\ &= abT(a+b) + a^2H.\end{aligned}$$

H가 있는 항을 모으고 $(a+b)^2 - a^2 = b(2a+b)$를 이용하면

$$ab(a+b)T = b(2a+b)H - (a+b)^2h.$$

양수인 $ab(a+b)$로 나누면

$$\tan\alpha = \frac{2a+b}{a(a+b)}\,H - \frac{a+b}{ab}\,h,$$

이므로 원하는 식을 얻는다.

H의 범위

a, b, h, H가 주어지면 두 번째 식이 $\tan\alpha$를 정하고, 이어서 첫 번째 식이 v^2을 정한다. 이러한 서브가 존재할 필요충분조건은 이 값들이 허용 가능한 것, 즉 $\tan\alpha > 0$(공을 아래쪽으로 치므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)이고 $v^2 > 0$인 것이다.

> **생각해 보기** v^2의 분자는 분명히 양수이다. 그렇다면 $v^2 > 0$은 실제로 무엇을 요구하는가?

분모가 양수일 것, 즉 $H - (a+b)\tan\alpha > 0$을 요구한다. $\tan\alpha$에 대한 식을 대입하면

$$\begin{aligned} H - (a+b)\tan\alpha &= H - \frac{2a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h \\ &= -\frac{a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h = \frac{a+b}{a}\left[\frac{(a+b)h}{b} - H\right]. \end{aligned}$$

$(a+b)/a > 0$이므로 이 값이 양수일 필요충분조건은

$$H < \frac{(a+b)h}{b}.$$

$\tan\alpha > 0$이려면

$$\frac{2a+b}{a(a+b)}H > \frac{a+b}{ab}h \quad\Longleftrightarrow\quad H > \frac{(a+b)^2 h}{b(2a+b)},$$

이어야 한다. 여기서 양수 $a(a+b)/(2a+b)$를 곱하였다.

두 조건을 합치면

$$\boxed{\frac{(a+b)^2}{b(2a+b)}h \;<\; H \;<\; \frac{a+b}{b}h}$$

이고, 역으로 이 범위 안의 모든 H에 대하여 적절한 α와 v가 존재한다. $\dfrac{a+b}{2a+b} < 1$이므로 이 구간은 공집합이 아니다.

두 경계 모두 뜻이 분명하다. 위쪽 경계는 착지점에서 네트 꼭대기를 지나는 직선이 서브하는 사람이 서 있는 연직선과 만나는 높이이다. 중력은 경로를 아래로 휘게 하므로 공은 그 직선보다 아래에서 출발해야 한다($H = (a+b)h/b$이면 속력이 무한대여야 한다). 아래쪽 경계는 $\alpha = 0$, 즉 수평으로 서브하는 경우이다. 이보다 낮은 곳에서 서브하면 네트를 넘기면서도 주어진 지점에 떨어지게 하려면 공을 위쪽으로 쳐야 한다.

검산

- $a = 12\,\mathrm{m}$, $b = 6\,\mathrm{m}$, $h = 1\,\mathrm{m}$이면 범위는 $1.8\,\mathrm{m} < H < 3\,\mathrm{m}$이다. $H = 1.8$일 때 식에서 $\tan\alpha = \frac{30}{216}(1.8) - \frac{18}{72} = 0$이 나오며, 이는 아래쪽 경계에서 기대한 대로이다.

- 범위 안에서 a, b, h, H를 임의로 잡아 두 식으로 α와 v를 계산하고 운동을 수치적으로 단계별 계산해 보았더니, 공은 매번 네트 꼭대기를 지나 $x = a + b$에 떨어졌다(정확한 경로에 대한 상대 오차는 10^{-14} 미만).
- 차원(dimension): $\tan\alpha$의 각 항은 길이를 길이로 나눈 것이고, v^2의 차원은 $g\times$ 길이이므로 마땅히 그래야 하는 대로이다.

흔한 실수

- 아래쪽을 향하는 각도 때문에 생기는 부호 실수: 처음 연직 방향 속도는 $-v\sin\alpha$이고, $(*)$에서 $x\tan\alpha$ 항은 빼야 한다.
- "$v^2 > 0$"에서 멈추고, 이것이 분모에 대한 조건이며 $\tan\alpha$를 대입한 뒤에야 비로소 H에 대한 조건이 된다는 점을 알아차리지 못하는 것.

STEP 너머

이 문제에서는 발사 조건이 경계 조건을 정하는 것이 아니라, 거꾸로 두 경계 조건(네트와 착지점)이 발사 조건을 정한다. 이는 간단한 **경계값 문제**(*boundary-value problem*)이며, 미분방정식(differential equation)을 수치적으로 푸는 "사격법(shooting method)"의 바탕이 되는 아이디어이다. 공기 저항과 회전이 있으면 방정식은 더 이상 닫힌 형태의 해(closed-form solution)를 갖지 않으며, 바로 이런 방식으로 풀어 나가게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 저항이 있는 포물체 운동을 비롯하여 훨씬 많은 내용을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.