풀이

STEP II 1997, 문제 10

역학 • 폭발과 탄성 충돌

> **STEP II 1997, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q10

핵심 아이디어

모든 속도를 축을 따르는 성분과 축을 가로지르는 성분으로 나눈다. 원통은 매끄러우므로(smooth) 반지름 방향으로만 밀 수 있다. 따라서 원통은 축 방향(axial) 속도를 결코 바꾸지 않으며, 탄성(elastic) 반발은 횡방향(transverse) 속도의 방향을 뒤집을 뿐이다. 그러면 폭발에서의 운동량 보존(conservation of momentum) 때문에 두 파편은 하나의 지름을 따라 서로 반대 방향으로 날아갈 수밖에 없고, 문제 전체는 두 벽 사이의 일차원 운동이 된다. 축 방향 운동은 그저 함께 따라갈 뿐이다.

풀이

설정하기

파편은 (작으므로) 입자로, 원통은 매끄럽고 고정된 것으로 모형화하고, 지시대로 중력은 무시한다. 원통의 축을 따라 z축을 잡고, 폭발은 시각 $t = 0$에 원점에서 일어난다고 하자.

폭발 직후 질량 qM인 파편의 속도를 축 방향 성분 w_1과 (축에 수직인) 횡방향 성분 $\mathbf{u}_1$의 합으로 쓰고, 질량 $(1-q)M$인 파편에 대해서도 마찬가지로 w_2, $\mathbf{u}_2$라 쓴다. 폭발하는 동안 외력이 작용하지 않으므로 운동량이 보존된다.

$$qMw_1 + (1-q)Mw_2 = Mv, \qquad qM\mathbf{u}_1 + (1-q)M\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

두 번째 식은 두 횡방향 속도가 서로 반대 방향을 향함을 말해 준다. 따라서 두 파편은 같은 지름을 따라 서로 반대쪽으로 축에서 멀어진다. 이 지름 방향을 x방향이라 하고, 파편 1(질량 qM)은 속력 u_1로 $x = +L$을 향해, 파편 2는 속력 u_2로 $x = -L$을 향해 움직인다고 하자. 여기서

$$qu_1 = (1-q)u_2. \tag{1}$$

$q \le \frac{1}{2}$이므로 $u_1 \ge u_2$이다. 즉 가벼운 파편이 더 빠르다.

각 파편은 (반지름을 따라 움직이므로) 벽에 정면으로 부딪히고, 따라서 매끄러운 벽이 주는 충격량(impulse)은 그 반지름 방향이다. 이 충격량은 (반발이 완전 탄성이므로) 횡방향 속도를 뒤집고 축 방향 속도는 그대로 둔다. 그러므로 각 파편은 계속 같은 지름을 따라 움직이고, 축 방향 속도는 내내 일정하다.

$q = \frac{3}{8}$임을 보이기

축 방향 운동. 축 방향 위치는 $z_1 = w_1 t$, $z_2 = w_2 t$이다. 두 파편은 어떤 시각 $t > 0$에 만나므로 $w_1 = w_2$이고, 그러면 운동량 식에서 $w_1 = w_2 = v$를 얻는다. 두 파편 모두 원래 물체가 있었을 위치와 보조를 맞추어 나아간다.

횡방향 운동. 파편 1은 $t = L/u_1$에 $x = L$에 도달한 뒤 되돌아오므로, 반발 후에는

$$x_1 = L - u_1\left(t - \frac{L}{u_1}\right) = 2L - u_1 t.$$

같은 방법으로, 반발 후 파편 2의 위치는 $x_2 = -2L + u_2 t$이다. 두 파편은 둘 다 반발한 뒤에 충돌하므로 $x_1 = x_2$에서

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2}, \qquad x = 2L - \frac{4Lu_1}{u_1 + u_2} = 2L\,\frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2}.$$

(1)에서 $u_2 = \frac{q}{1-q}u_1$이므로 $u_1 + u_2 = \frac{u_1}{1-q}$, $u_2 - u_1 = \frac{(2q-1)u_1}{1-q}$이다. 따라서 충돌 지점은

$$x = 2L(2q - 1).$$

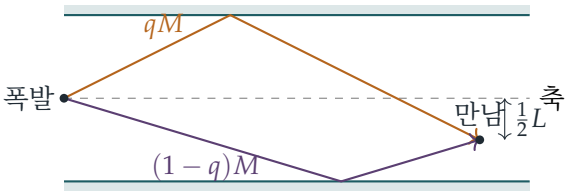
$|x| = \frac{1}{2}L$이어야 하므로 $2q - 1 = \pm\frac{1}{4}$이고, $q = \frac{5}{8}$ 또는 $q = \frac{3}{8}$이다. $q \le \frac{1}{2}$이므로

$$q = \frac{3}{8},$$

이 되어 증명이 끝난다. 충돌은 $x = -\frac{1}{2}L$, 즉 축을 기준으로 무거운 파편 쪽에서 일어난다.

? 생각해 보기 이것이 정말로 각각 정확히 한 번씩 반발한 뒤의 첫 만남인가?

$q = \frac{3}{8}$이면 (1)에서 $u_2 = \frac{3}{5}u_1$이다. 파편 1은 $t = L/u_1$에, 파편 2는 $t = \frac{5}{3}L/u_1$에 반발하고, 충돌 시각은 $4L/(u_1 + u_2) = \frac{5}{2}L/u_1$이므로 두 반발 시각보다 모두 늦다. 더 일찍 만날 수는 없을까? 파편 1이 반발하기 전에는 두 파편이 서로 멀어지고 있고, 되돌아오는 파편 1이 파편 2를 따라잡으려면 $t = 2L/(u_1 - u_2) = 5L/u_1$이 되어야 하는데, 이는 파편 2가 방향을 바꾸고 한참 지난 뒤이다. 그러므로 앞에서 구한 만남이 첫 만남이고, 각 파편은 정확히 한 번씩 반발한다.



그림은 축과 공통 지름을 포함하는 평면을 나타낸다(축 방향은 가로 방향이다). $q = \frac{3}{8}$과 아래에서 구하는 속력에 맞추어 축척대로 그렸다.

폭발로 주어진 에너지

충돌 시각은

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2} = \frac{4L(1-q)}{u_1} = \frac{5L}{2u_1}.$$

이를 $5L/v$와 같게 놓으면 $u_1 = \frac{1}{2}v$이고, 따라서 $u_2 = \frac{3}{5}u_1 = \frac{3}{10}v$이다.

축 방향 속도는 v로 변하지 않으므로, 폭발에서 얻은 운동 에너지(kinetic energy)는 순전히 횡방향 운동 에너지이다.

$$\begin{aligned}\Delta E &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{8}M(\tfrac{1}{2}v)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{8}M(\tfrac{3}{10}v)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Mv^2\left(\tfrac{3}{32} + \tfrac{9}{160}\right) = \tfrac{1}{2}Mv^2\cdot\tfrac{3}{20} = \frac{3Mv^2}{40}.\end{aligned}$$

합체 후의 속도

충돌 직전, 각 파편의 횡방향 속도는 반발로 뒤집혀 있다. 파편 1의 횡방향 운동량은 $-qMu_1$, 파편 2의 횡방향 운동량은 $+(1-q)Mu_2$이다. (1)에 의해 이 둘의 합은 0이다. 축 방향 운동량은 $qMv + (1-q)Mv = Mv$이다. 합체(coalescence)에서 운동량이 보존되므로, 합쳐진 질량 M인 물체의 속도는

$$v \text{ (축 방향)},$$

으로 원래 물체와 같다. 다만 이 물체는 축에서 거리 $\frac{1}{2}L$만큼 떨어진, 축에 평행한 직선 위를 움직인다. 폭발에서 생긴 에너지 $\frac{3}{40}Mv^2$은 합체 과정에서 모두 잃는다.

검산

- $q = \frac{1}{2}$이면 $x = 0$이다. 같은 두 파편은 서로 거울상이므로 축 위에서 만나야 하고, 실제로 그렇다.
- $L = v = 1$, $u_1 = 0.5$, $u_2 = 0.3$이라 하면, $t = 5$일 때 파편 1은 $2 - 0.5\times 5 = -0.5$에, 파편 2는 $-2 + 0.3\times 5 = -0.5$에 있다. $x = \pm 1$에서 반사하도록 한 시간 단계 시뮬레이션에서도 각각 한 번씩 반발한 뒤 $t = 5.000$, $x = -0.500$에서 만나는 결과가 재현되었다.

- 최종 횡방향 운동량은 $-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{10}=0$이므로 최종 속도는 순전히 축 방향이다.

흔한 실수

- 벽이 축 방향 속도를 바꾸도록 하는 것. 매끄러운 벽은 수직(반지름 방향) 힘만 작용한다.
- 반발이 횡방향 운동량을 뒤집는다는 사실을 잊는 것. 전체 횡방향 운동량은 **두** 파편이 모두 반발한 뒤에야 다시 0이 된다.
- $q=\frac{5}{8}$을 남겨 두는 것. 이는 파편의 이름표만 바꾼 같은 상황이며, $q\le\frac{1}{2}$ 조건으로 배제된다.

STEP 너머

운동을 대칭 방향을 따르는 성분과 가로지르는 성분으로 나누는 것은 큰 아이디어의 출발점이다. 바로 계의 대칭이 보존량을 준다는 것이다. 여기서 원통은 길이 방향 어디에서나 똑같아 보이므로, 벽이 있어도 축 방향 운동량이 보존된다(뇌터(Noether) 정리가 이를 엄밀하게 만든다). 이 문제는 또한 폭발 뒤에 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이 이어지면, 축 방향 운동은 아무 상관 없이 계속되는 동안 에너지가 열로 되돌려질 수 있음을 보여 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 방식으로 운동량과 질량중심(centre of mass)의 운동을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.