풀이

STEP II 1997, 문제 1

순수수학 • 자릿수의 합과 경우의 수

> **STEP II 1997, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q1

핵심 아이디어

수를 하나하나 나열하지 말고, 먼저 개수를 센 다음 각 자릿값(place value)의 기여를 따로 따로 더한다. 허용된 각 숫자는 끝의 세 자리 각각에 똑같은 횟수만큼 나타나므로, 합은 거의 저절로 계산된다. 더 좋은 방법도 있다. 대칭(symmetry)을 이용하는 것이다. 각 숫자 d를 $7-d$로 바꾸면 $0 \leftrightarrow 7, 2 \leftrightarrow 5$가 서로 맞바뀌므로, 수들이 합이 일정한 쌍으로 짝지어지고 인수분해(factorisation)가 곧바로 나온다.

풀이

어떤 수가 조건을 만족하는가?

1000과 6000 사이에서 조건을 만족하는 수는 네 자리 수이고, 천의 자리 숫자는 $0, 2, 5, 7$ 중 하나여야 한다. 0일 수는 없고(그러면 네 자리보다 적어진다), 7일 수도 없다(그러면 7000보다 큰 수가 된다). 따라서 천의 자리 숫자는 2 또는 5이고, 이렇게 만든 2000부터 5777까지의 모든 수는 범위 안에 있다. 양 끝값 1000과 6000 자체는 숫자 1과 6을 포함하므로, "사이"가 양 끝을 포함하는지는 상관없다.

나머지 세 자리의 숫자는 각각 허용된 네 숫자 중 어느 것이든 독립적으로 될 수 있다. 따라서 이러한 수는

$$2 \times 4 \times 4 \times 4 = 128$$

개이다.

자릿값별로 더하기

천의 자리. 128개의 수 중 절반인 64개는 2로 시작하고, 나머지 64개는 5로 시작한다. 천의 자리 숫자들의 기여는

$$64 \times (2+5) \times 1000 = 448\,000.$$

이다.

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리. 이 중 한 자리를 고정하자. 그 자리에 어떤 숫자가 오든 나머지 자리의 숫자를 고르는 방법의 수는 같으므로, 네 숫자 각각은 그 자리에 정확히 $128/4 = 32$개의 수에서 나타난다. 따라서 그 자리의 숫자 합은 $32 \times (0+2+5+7) = 32 \times 14 = 448$이다. 세 자리의 가중치는 각각 100, 10, 1이므로, 이들의 기여를 모두 합하면

$$448 \times (100+10+1) = 448 \times 111 = 49\,728.$$

이다.

이를 더하면 구하는 합은

$$S = 448 \times 1000 + 448 \times 111 = 448 \times 1111 = 497\,728.$$

이다.

소수의 곱으로 나타내기

$448 = 64 \times 7 = 2^6 \times 7$이고 $1111 = 11 \times 101$이며, 여기서 101은 소수(prime)이다(2, 3, 5, 7로 나누어떨어지지 않고, $11^2 > 101$이다). 따라서

$$S = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101.$$

> ? **생각해 보기** 자릿값별 계산 없이 답을 알아내는 방법이 있을까?

있다. n이 조건을 만족하면 $7777 - n$도 조건을 만족한다. 7777에서 자리별로 빼면 받아내림이 전혀 생기지 않고, 각 숫자 d가 $7-d$로 바뀌는데, 이 대응은 $\{0,2,5,7\}$을 자기 자신으로 보내며 맨 앞자리 숫자 2와 5를 맞바꾼다. 따라서 128개의 수는 합이 각각 7777인 64개의 쌍으로 나뉜다(7777은 홀수이므로 자기 자신과 짝지어지는 수는 없다). 그러므로

$$S = 64 \times 7777 = 2^6 \times 7 \times 1111 = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101,$$

이고, 이는 위의 계산 결과와 일치한다.

검산

1000부터 6000까지를 컴퓨터로 간단히 탐색하면 조건을 만족하는 수가 정확히 128개이고 그 합이 497 728임을 확인할 수 있으며, $2^6 \times 7 \times 11 \times 101 = 64 \times 7777 = 497\,728$이다. 크

기가 타당한지 확인해 보면, 조건을 만족하는 수의 평균은 $7777/2 = 3888.5$로, 범위 2000부터 5777까지의 한가운데에 잘 자리 잡고 있다.

흔한 실수

- 맨 앞자리 숫자로 7을 허용하거나(6000보다 큰 수가 생긴다), 0이 맨 앞에 올 수 없다는 것을 잊는다.
- 천의 자리에서도 각 숫자가 $128/4$번씩 나타난다고 말한다. 천의 자리에는 2와 5만 각각 64번씩 나타난다.
- 1111을 11×101로 분해하지 않고 497 728이나 448×1111에서 멈춘다.

STEP 너머

각 숫자가 각 자리에 몇 번 나타나는지 세는 것은 **이중 셈**(double counting) 논법의 가장 간단한 예이다. $7777 - n$ 짝짓기는 가우스(Gauss)의 공식 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$을 얻을 때와 같은 종류의 대칭 논법이다. 각 자리 숫자가 정해진 집합에서 나오는 수와 그 합은 초등 정수론(number theory)과 조합론(combinatorics)의 단골 주제이며, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 다음 단계로 읽기에 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.