풀이

STEP I 1997, 문제 9

역학 • 상대 속도

> **STEP I 1997, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q9

핵심 아이디어

길가에서 보면 모든 것이 움직이지만, 자동차 안에서 보면 모든 것이 멈춰 있다. 자동차들은 길이 c의 틈을 사이에 두고 고정된 블록의 행렬이 되고, 닭은 **상대** 속도(relative velocity)로 직선을 따라 길을 건넌다. 닭이 무사히 통과하려면, 폭 a인 차로 안에 있는 동안 (자동차에 대해) 옆으로 밀려나는 거리가 틈의 길이 c를 넘지 않아야 한다. 이 하나의 조건에서 부등식이 나오고, 최소 속력은 $c\sin\theta + a\cos\theta$를 최대화하는 데서 얻어진다. 이는 전형적인 $R\cos(\theta - \alpha)$ 문제이다.

풀이

닭을 입자로, 자동차들을 속력 V로 움직이는 직사각형으로 모형화하고, 각 자동차는 도로를 가로지르는 폭 a의 같은 띠를 차지한다고 하자. 차량 진행 방향으로 도로를 따라 x축을, 도로를 가로질러 y축을 잡으면, 닭의 속도는 $0 < \theta < \pi$에 대하여 $(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$이다. 자동차가 있는 띠만 중요하다. 도로의 나머지 부분에서는 닭이 위험에 처하는 일이 없다.

부등식

자동차에 대한 닭의 상대 속도는

$$\mathbf{w} = (u\cos\theta - V,\ u\sin\theta).$$

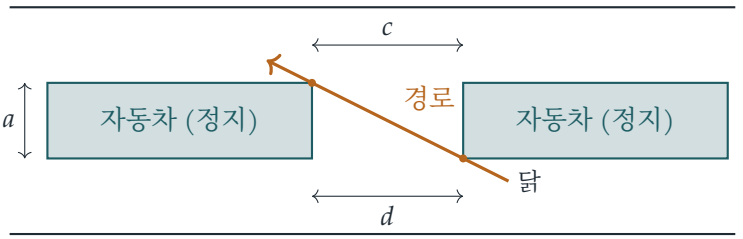
이다. 자동차의 기준틀(frame)에서는 자동차들이 정지해 있고, 닭은 일정한 속도 $\mathbf{w}$로 직선 운동을 한다. 닭이 폭 a인 띠를 건너는 데 걸리는 시간은

$$\tau = \frac{a}{u\sin\theta}$$

이고, 그동안 닭은 (자동차에 대해, 차량 진행 반대 방향으로) 뒤로

$$d = (V - u\cos\theta)\,\tau = \frac{a(V - u\cos\theta)}{u\sin\theta}.$$

만큼 밀려난다.



그림은 극단적인 경우인 $d = c$를 나타내며, 이때 경로는 정확히 틈의 대각선을 따라간다.

? **생각해 보기** 밀려나는 거리 d가 왜 c 이하여야 하는가?

자동차의 기준틀에서 띠를 지나는 닭의 경로는 도로 방향으로 길이 $|d|$인 구간을 덮고, 그 구간의 모든 점은 차로 안의 어떤 높이에서 지나가게 된다. 정지한 자동차들은 길이 c인 틈만을 비워 두므로, 그 구간 전체가 하나의 틈 안에 들어가야 한다. 즉 $|d| \le c$이다. (역으로 $|d| \le c$이면, 닭은 출발 시각을 조절하여 그 구간이 틈 안에 놓이게 할 수 있으므로 안전하게 건널 수 있다.)

특히 $d \le c$, 즉

$$a(V - u\cos\theta) \le c\,u\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad Va \le u\,(c\sin\theta + a\cos\theta).$$

이다. 좌변이 양수이므로 안전하게 건너는 모든 경우에 $c\sin\theta + a\cos\theta > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta},$$

이로써 요구된 결과를 얻는다. (조건의 나머지 절반인 $d \ge -c$는 빠른 닭이 틈을 앞질러 앞 차에 부딪히는 것을 막아 준다. 이 조건은 아래의 최솟값에서는 아무 역할도 하지 않는다.)

최소 속력과 건너는 시간

$c\sin\theta + a\cos\theta = \sqrt{a^2 + c^2}\,\cos(\theta - \alpha)$로 쓰자. 여기서 α는

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \tan\alpha = \frac{c}{a}.$$

을 만족하는 예각이다. 따라서 $c\sin\theta + a\cos\theta \le \sqrt{a^2 + c^2}$이고, 등호는 $\theta = \alpha$일 때만 성립한다. 그러므로 모든 방향에 대하여

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta} \ge \frac{Va}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

이고, $\theta = \alpha$이고 $u = Va/\sqrt{a^2+c^2}$일 때 두 부등식 모두 등호가 성립한다. 이 선택은 실제로 안전하다. 이때 정확히 $d = c$가 되고(그림의 경로처럼 모서리에서 모서리로), $-c \le d \le c$가 성립한다. 따라서 가능한 최소 등속력은 각 $\alpha = \arctan(c/a)$에서 $Va/\sqrt{a^2+c^2}$이다.

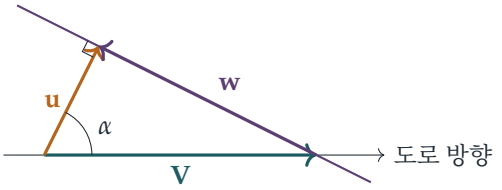
닭은 도로를 가로지르는 속도 성분 $u\sin\alpha$로 전체 폭 b를 건너므로, 걸리는 시간은

$$\frac{b}{u\sin\alpha} = b\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{Va}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \frac{b\,(a^2+c^2)}{Vac} = \frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

? 생각해 보기 최소 속력은 왜 $\tan\theta = c/a$일 때 나오는가?

속도들을 살펴보자. 닭의 속도는 $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{w}$이고, 가장 좋은 경우 상대 속도 $\mathbf{w}$는 틈의 대각선 방향, 즉 $(-c, a)$ 방향을 향한다. 따라서 $\mathbf{u}$의 끝점은 $\mathbf{V}$의 끝점을 지나고 그 방향을 갖는 직선 위에 있으며, 가장 짧은 $\mathbf{u}$는 원점에서 그 직선에 내린 수선이다. 그 방향 (a, c)는 도로와 각 $\arctan(c/a)$를 이루고, 그 길이는 $V\sin(\text{대각선의 각}) = Va/\sqrt{a^2+c^2}$이다.



검산

- 단위: $Va/\sqrt{a^2+c^2}$는 속력이고, $\frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$는 길이를 속력으로 나눈 것, 즉 시간이다.
- 극한: $\theta = \frac{\pi}{2}$(곧장 가로지름)이면 한계는 $u \ge Va/c$이다. 닭은 틈 하나가 지나가는 시간 c/V 안에 폭 a를 건너야 한다. 이는 분명히 옳다.
- 수치: $a = 1, c = 2, V = 2, b = 5$이면 최소 속력은 $\tan\theta = 2$에서 $2/\sqrt{5} \approx 0.894$이고, 건너는 시간은 $\frac{5}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right) = 6.25$이다. 도로의 기준틀에서 자동차와 닭을 직접 시뮬레이션해도 결과가 일치한다. 이 속력의 1.01배에서는 안전한 출발 시각이 존재하고, 0.99배에서는 존재하지 않는다.

흔한 실수

- 안전 조건에 도로 전체를 건너는 시간 $b/(u\sin\theta)$를 사용하는 것. 중요한 것은 폭 a인 차로 안에서 보내는 시간뿐이다.
- 상대 속도의 부호를 잘못 잡는 것. 자동차에 대해 닭은 도로 방향으로 $u\cos\theta + V$가 아니라 $u\cos\theta - V$로 움직인다.

STEP 너머

장애물이 정지해 있는 기준틀로 바꾸는 것은 갈릴레이 변환(Galilean transformation)이며, 문제가 정적으로 보이는 기준틀을 고르는 것은 역학에서 가장 유용한 습관 중 하나이다. 최소화 과정 또한 작은 최적화 문제이다. 한 점에서 직선까지의 가장 짧은 벡터는 수선이며, 이는 나중에 선형대수학(linear algebra)에서 정사영(orthogonal projection)으로 다시 만나게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 이런 정신의 상대 운동 문제가 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.