풀이

# STEP I 1997, 문제 8

순수수학 • 지수방정식의 근

> **STEP I 1997, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q8

## 핵심 아이디어

$a^x > 0$이므로 $x = a^x$의 근(root)은 반드시 양수이다. 따라서 양변에 로그(logarithm)를 취할 수 있고, 문제는 $x > 0$에서 $f(x) = \ln x - x\ln a$의 영점(zero)에 관한 문제로 바뀐다. $a > 1$이면 이 함수는 증가하다가 감소하므로, 최댓값이 0 이상일 때에만 영점을 가진다. $0 < a < 1$이면 이 함수는 강한 증가(strictly increasing) 함수이므로 영점을 많아야 한 번 지나며, 문제는 실제로 영점을 지나는지 여부이다.

## 풀이

### $f(x) = 0$으로 바꾸기

풀이 전체에서 $a > 0$이므로, $a^x = e^{x\ln a}$는 모든 실수 $x$에 대해 정의되며 양수이다. $x \le 0$이면 $a^x > 0 \ge x$이므로 $x \le 0$인 근은 없다. $x > 0$이면 양변이 모두 양수이고, ln은 강한 증가 함수이므로

$$x = a^x \iff \ln x = x\ln a \iff f(x) = 0, \qquad \text{여기서} f(x) = \ln x - x\ln a.$$

따라서 $x = a^x$의 실근은 정확히 $(0,\infty)$에서 $f$의 영점이다.

### $a > e^{1/e}$일 때 근이 없음

이 경우 $a > e^{1/e} > 1$이므로 $\ln a > 0$이다. 미분하면

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a,$$

이고, 이는 $0 < x < 1/\ln a$에서 양수, $x > 1/\ln a$에서 음수이다. 따라서 $f$는 증가하다가 감소하며, $(0,\infty)$에서의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) - 1 = -\ln(\ln a) - 1.$$

이다. 이제 $a > e^{1/e}$에서 $\ln a > 1/e$를 얻고, 다시 로그를 취하면(양변이 모두 양수이므로) $\ln(\ln a) > \ln(1/e) = -1$이다. 그러므로

$$f(x) \le -\ln(\ln a) - 1 < 0 \quad \text{모든} x > 0.$$

따라서 $f$는 결코 0이 되지 않으며, 방정식 $x = a^x$는 실근을 갖지 않는다. 이로써 증명이 끝난다.

**?** **생각해 보기** 정확히 $a = e^{1/e}$일 때와 $1 < a < e^{1/e}$일 때는 어떻게 되는가?

$a = e^{1/e}$이면 최댓값은 정확히 0이고 $x = 1/\ln a = e$에서 얻어지므로, 근은 하나의 (중복된) 근 $x = e$, 즉 중근(repeated root)이다. 이때 직선 $y = x$는 점 $(e,e)$에서 $y = a^x$에 접한다(tangent). $1 < a < e^{1/e}$이면 최댓값이 양수이고 양 끝에서 $f \to -\infty$이므로 근이 두 개이다. ($a = 1$이면 유일한 근은 $x = 1$이다.) 문제에서 이 경우들을 묻지는 않지만, 이를 통해 $e^{1/e}$가 정확한 경계값임을 알 수 있다.

### $0 < a < 1$일 때 근이 정확히 하나

이제 $\ln a < 0$이므로

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a = \frac{1}{x} + |\ln a| > 0 \quad \text{모든} x > 0,$$

이고, $f$는 $(0,\infty)$에서 강한 증가 함수이다. 따라서 $f$의 영점은 **많아야 하나**이다.

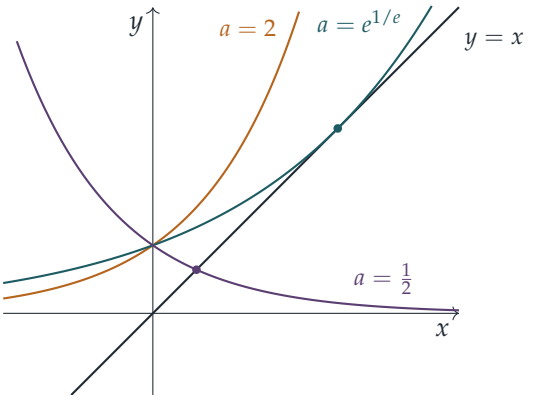
영점이 실제로 하나 존재함을 보이기 위해, $f$가 $(0,\infty)$에서 연속(continuous)이고

$$f(1) = -\ln a > 0, \qquad f(a) = \ln a - a\ln a = (1-a)\ln a < 0,$$

임에 주목하자. 두 부등식 모두 $0 < a < 1$을 이용했다. 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 $f$는 $a$와 1 사이에 영점을 가진다.

따라서 $0 < a < 1$이면 방정식 $x = a^x$는 **정확히 하나**의 실근을 가지며, 그 근은 구간 $(a,1)$에 있다.

그림을 보면 이 사실이 분명해진다. $y = a^x$는 감소하는 양의 함수이고 $y = x$는 증가하므로, 두 그래프는 정확히 한 번 만난다. (같은 말로, $g(x) = a^x - x$는 강한 감소 함수이고 $g(0) = 1 > 0, g(1) = a - 1 < 0$이다.)




## 검산

- 경계에서 $(e^{1/e})^e = e$이므로, $a = e^{1/e} \approx 1.4447$일 때 $x = e$는 실제로 근이며, 이는 접한다는 사실과 일치한다.
- $a = \frac{1}{2}$일 때 이분법(bisection)으로 구한 유일한 근은 $x \approx 0.6412$이고, 예상대로 $(\frac{1}{2}, 1)$에 있다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 200개의 $a > e^{1/e}$에 대해 함수 $a^x - x$는 $[-20, 20]$ 위의 촘촘한 격자에서 항상 양수였다. 또 $\ln x - x \ln a$의 최댓값은 $-1 - \ln \ln a$와 일치했고, $e^{1/e}$보다 조금 작은 $a$에 대해서는 근이 두 개였으며, 무작위로 고른 500개의 $a \in (0, 1)$에 대해서는 부호 변화가 정확히 한 번 있었다.

## 흔한 실수

- 모든 근이 $x > 0$을 만족한다는 점을 먼저 짚지 않고 로그를 취하는 것. 그렇지 않으면 $\ln x$가 정의되지 않으므로, $x \leq 0$인 경우는 (한 줄짜리) 별도의 논증이 필요하다.
- $0 < a < 1$일 때 $f$가 증가함수라는 것만 보이는 것. 이는 근이 **많아야** 하나임을 증명할 뿐이며, 근이 실제로 존재함을 보이려면 부호 변화도 필요하다.
- $\ln a > 1/e$의 양변에 ln을 취할 때 부등호 방향을 거꾸로 쓰는 것. ln은 증가함수이고 양변이 모두 양수이므로 부등호 방향은 그대로 유지된다.

## STEP 너머

$0 < a < 1$일 때의 근은 사상 $x \mapsto a^x$의 부동점(fixed point)이며, $x_{n+1} = a^{x_n}$을 반복(iteration)하면 "무한 거듭제곱 탑(infinite power tower)" $a^{a^{a^{\cdots}}}$에 이르게 된다. 오일

러(Euler)는 이 탑이 정확히 $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$일 때 수렴(converge)함을 보였는데, 여기서도 같은 경계값 $e^{1/e}$가 다시 나타난다. 반복이 언제 수렴하는지를 연구하다 보면 대학 1학년 해석학(analysis)에서 배우는 축소 사상 정리(contraction mapping theorem)에 이르게 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 중간값 정리와 이에 필요한 배경 지식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.