풀이

STEP I 1997, 문제 7

순수수학 • 가우스 구적법

> **STEP I 1997, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q7

핵심 아이디어

양변은 모두 P에 대하여 선형(*linear*)으로 의존하므로, 네 개의 기본 삼차식(cubic) 1, t, t^2, t^3에 대하여 공식이 성립하기만 하면 모든 삼차식에 대하여 성립한다. 이렇게 하면 문제는 미지수 네 개에 대한 방정식 네 개로 바뀐다. 이 방정식들은 비선형(nonlinear)이지만, 홀수 차수와 짝수 차수가 깔끔하게 분리되고, 나머지는 $t = 0$에 대한 대칭(symmetry)이 해결해 준다.

풀이

$\mathrm{P}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$이라 하자. 그러면

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = c_0 \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t + c_1 \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + c_2 \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t + c_3 \int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t$$

이고, $a_1\mathrm{P}(u_1) + a_2\mathrm{P}(u_2)$도 정확히 같은 방식으로 나뉜다. 따라서 공식이 모든 삼차식에 대하여 성립할 필요충분조건은 $\mathrm{P}(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2, 3$에 대하여 성립하는 것이다. ("필요조건(only if)" 방향은 각 t^k 자체가 넓은 의미에서 삼차다항식이기 때문이고, "충분조건(if)" 방향은 더하면 되기 때문이다.) $k = 0, 1, 2, 3$일 때 $\int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t$의 값은 2, 0, $\frac{2}{3}$, 0이므로, 다음이 필요하다.

$$a_1 + a_2 = 2, \tag{A}$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0, \tag{B}$$

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 = \tfrac{2}{3}, \tag{C}$$

$$a_1 u_1^3 + a_2 u_2^3 = 0. \tag{D}$$

생각해 보기 이 방정식들은 비선형이다. 이들을 조합하여 인수분해(factorise)되는 식을 만들 수 있을까?

(D)에서 (B)의 u_2^2배를 빼면 a_2가 들어 있는 항이 소거되어

$$a_1u_1^3 - a_1u_1u_2^2 = a_1u_1(u_1-u_2)(u_1+u_2) = 0.$$

을 얻는다. 처음 세 인수가 0이 될 가능성을 차례로 배제하자.

- $a_1 = 0$이면: (A)에서 $a_2 = 2$, (B)에서 $u_2 = 0$이 되고, (C)는 $0 = \frac{2}{3}$이 된다. 불가능하다.
- $u_1 = 0$이면: (B)에서 $a_2u_2 = 0$이므로 $a_2u_2^2 = 0$이고, 이번에도 (C)는 $0 = \frac{2}{3}$이 된다. 불가능하다.
- $u_1 = u_2$이면: 두 점이 일치하고, (B)는 $(a_1+a_2)u_1 = 2u_1 = 0$이 되므로 $u_1 = u_2 = 0$이며, 역시 (C)가 성립하지 않는다.

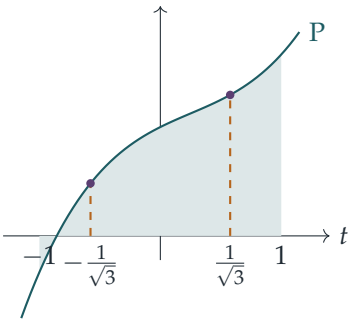
따라서 $u_1 \neq 0$이고 $u_2 = -u_1$이다. 이제 (B)는 $(a_1-a_2)u_1 = 0$이 되므로 $a_1 = a_2$이고, (A)에서 $a_1 = a_2 = 1$이다. 마지막으로 (C)에서 $2u_1^2 = \frac{2}{3}$이므로 $u_1^2 = \frac{1}{3}$이며, 이때 (D)는 자동으로 성립한다. 그러므로

$$\boxed{a_1 = a_2 = 1, \qquad u_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

(또는 u_1과 u_2를 바꾼 것)이다. 즉

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{P}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{P}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{임의의 삼차식P.}$$

이 논증은 또한 이름을 바꾸는 것을 제외하면 이것이 **유일한** 선택임을 보여 준다.



어떤 삼차식을 그리든, 색칠한 넓이는 두 점선의 높이의 합과 같다.

검산

- $\mathrm{P}(t) = t^2$: 적분값은 $\frac{2}{3}$이고, 공식은 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$을 준다.

- $\mathrm{P}(t) = 1 + t + t^2 + t^3$: 적분값은 $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$이고, 홀수 차수 항이 소거되므로 공식은 $2 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$을 준다.
- 이 공식은 t^4에 대해서는 정확하지 **않다**. 공식은 $2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$를 주지만 적분값은 $\frac{2}{5}$이다. 따라서 삼차식이 정말로 한계이다.
- 수치적으로, 무작위 삼차식 10^4개에 대하여 양변이 10^{-14} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- 처음부터 대칭($u_2 = -u_1, a_1 = a_2$)을 가정하는 것. 그렇게 하면 정답을 빨리 얻지만, 다른 선택이 불가능하다는 것은 보여 주지 못한다. 위의 인수분해는 그것을 보여 준다.
- 양변을 나눌 때 $a_1 = 0$ 또는 $u_1 = u_2$인 경우를 잊는 것.
- $\mathrm{P}(t) = 1$과 t^2만 확인하는 것. 대칭을 강제하는 것은 홀수 차수 조건 (B)와 (D)이다.

STEP 너머

이것은 두 점 **가우스 구적법**(*Gaussian quadrature*)이다. 잘 고른 점 n개와 가중치를 사용하면 차수가 $2n - 1$ 이하인 모든 다항식을 정확히 적분할 수 있는데, 이는 같은 간격으로 놓인 점 n개로 가능한 차수의 두 배이다. 가장 좋은 점은 르장드르 다항식(Legendre polynomials)의 영점이며(여기서는 $\frac{1}{2}(3t^2 - 1)$이고, 그 영점은 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이다), 이 다항식들은 $[-1, 1]$에서 직교(orthogonal)한다. 직교다항식은 대학 1학년 수치해석(numerical analysis)과 미분방정식(differential equations)의 풀이에 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서는 급수해(series solutions) 단원에서 르장드르 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.