풀이

STEP I 1997, 문제 6

순수수학 • 적분을 이용한 원주율의 범위

STEP I 1997, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.3 절 22/7은 π보다 크다에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/twenty-two-sevenths.html

핵심 아이디어

피적분함수(integrand)는 분자의 차수가 분모의 차수보다 높은 유리함수(rational function)이므로, 먼저 x^2+1로 다항식 나눗셈(polynomial division)을 한다. 그러면 쉽게 적분되는 다항식 몫(quotient)과 $1+x^2$ 위에 놓인 상수 나머지(remainder)가 남는데, 이 나머지 항을 적분하면 아크탄젠트(arctangent)가 된다. π는 바로 이 아크탄젠트에서 나온다. 마지막 부등식(inequality)은 $[0,1]$에서 $1 \leq 1+x^2$임을 이용해 피적분함수를 $x^4(1-x)^4$ 자체와 비교하면 된다.

풀이

나눗셈

이항정리(binomial theorem)로 전개하면

$$x^4(1-x)^4 = x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) = x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4.$$

이제 x^2+1로 나누는데, 매번 최고차항을 떼어 낸다.

$$\begin{aligned}
x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4 &= x^6(x^2+1)+\left(-4x^7+5x^6-4x^5+x^4\right)\\
-4x^7+5x^6-4x^5+x^4 &= -4x^5(x^2+1)+\left(5x^6+x^4\right)\\
5x^6+x^4 &= 5x^4(x^2+1)+\left(-4x^4\right)\\
-4x^4 &= -4x^2(x^2+1)+4x^2\\
4x^2 &= 4(x^2+1)-4.
\end{aligned}$$

x^2+1의 배수들을 모으면

$$x^4(1-x)^4=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)(x^2+1)-4,$$

이므로

$$a_6=1,\quad a_5=-4,\quad a_4=5,\quad a_3=0,\quad a_2=-4,\quad a_1=0,\quad a_0=4,\quad b=-4.$$

간단히 검산해 보자. $x=0$일 때 우변은 $4\cdot 1-4=0$이고, $x=1$일 때 우변은 $(1-4+5-4+4)\cdot 2-4=0$이므로 두 경우 모두 좌변과 일치한다.

$\frac{22}{7}-\pi$와 같은 적분

항등식의 양변을 $1+x^2$(결코 0이 아니다)로 나누면

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}.$$

$[0,1]$에서 항별로 적분하고 $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x$를 이용하면

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\tfrac{1}{7}x^7-\tfrac{2}{3}x^6+x^5-\tfrac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1-4\Big[\arctan x\Big]_0^1\\
&= \tfrac{1}{7}-\tfrac{2}{3}+1-\tfrac{4}{3}+4\ -\ 4\cdot\tfrac{\pi}{4}\\
&= \tfrac{1}{7}+3-\pi\\
&= \frac{22}{7}-\pi,
\end{aligned}$$

이다. 여기서 $-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-2$이고 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$이다. 이것이 구하는 결과이다.

$x^4(1-x)^4$의 적분

처음에 구한 전개식을 이용하면

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{6}+\tfrac{6}{7}-\tfrac{4}{8}+\tfrac{1}{9}.$$

공통분모 $2520=5\cdot 7\cdot 8\cdot 9$로 통분하면

$$\frac{504-1680+2160-1260+280}{2520}=\frac{4}{2520}=\frac{1}{630}.$$

π의 상계와 하계

$f(x) = x^4(1-x)^4$라 하자. 그러면 $0 < x < 1$에서 $f(x) > 0$이다.

상계(*upper bound*). $(0,1)$에서 피적분함수 $f(x)/(1+x^2)$는 연속이고 엄격히 양수이므로, $[0,1]$에서의 적분도 엄격히 양수이다. 따라서 $\frac{22}{7} - \pi > 0$, 즉 $\pi < \frac{22}{7}$이다.

하계(*lower bound*). $0 < x < 1$이면 $1 + x^2 > 1$이고, $f(x) > 0$이므로

$$\frac{f(x)}{1+x^2} < f(x).$$

? **생각해 보기** 두 적분 사이의 부등식이 왜 단순히 $\leq$가 아니라 엄격한 부등식일까?

차 $f(x) - \dfrac{f(x)}{1+x^2} = \dfrac{x^2 f(x)}{1+x^2}$는 열린구간 $(0,1)$ 전체에서 연속이고 엄격히 양수이므로, $[0,1]$에서의 적분은 엄격히 양수이다. (음이 아니고 어딘가에서 양수인 연속함수의 적분은 양수이다.) 따라서

$$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630},$$

이고, 이를 정리하면 $\pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$이다. 두 경계를 합치면

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630},$$

이므로 증명이 끝난다.

검산

- 수치적으로 $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.0012645$이고, 첫 번째 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열두 자리까지 같은 값이 나온다.
- $\frac{1}{630} \approx 0.0015873$은 0.0012645보다 넉넉히 크다. 경계에 따르면 $3.141270 < \pi < 3.142857$이고, 실제로 $\pi \approx 3.141593$이다.
- 값 $\frac{1}{630}$은 베타 적분(beta integral) 공식 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$로부터도 얻을 수 있으며, 이 공식은 $\dfrac{4!\,4!}{9!} = \dfrac{576}{362880} = \dfrac{1}{630}$을 준다.

흔한 실수

- 다항식 나눗셈에서 두 개의 0인 계수 a_3과 a_1을 빠뜨리는 실수. 모든 거듭제곱 자리를 지켜 두지 않으면 나머지가 틀리게 나온다.

- $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\ln 2$라고 쓰는 실수($\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$와 혼동한 것이다). 올바른 값은 $4\arctan 1 = \pi$이다.
- 마지막 단계에서 $\leq$만 증명하는 실수. 문제는 엄격한 부등식을 요구하므로, 두 적분이 왜 같을 수 없는지 밝혀야 한다.

STEP 너머

20세기에 발견된 이 아름다운 적분은 교과서에 나오는 근삿값 $\frac{22}{7}$이 π보다 크다는 사실을 단번에 보여 준다. $x^n(1-x)^n$에 간단한 함수를 곱해 적분한 뒤 그 결과가 작지만 양수임을 보이는 같은 아이디어가 π와 e가 무리수(irrational)라는 고전적인 증명의 원동력이다. 0과 1 사이에는 정수가 존재할 수 없기 때문이다. $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$와 같은 적분은 베타 함수(beta function)의 값으로, 대학 1학년 해석학(analysis)과 확률에서 만나게 된다. 적분 사이의 엄격한 부등식을 꼼꼼히 다루는 방법은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.