풀이

STEP I 1997, 문제 5

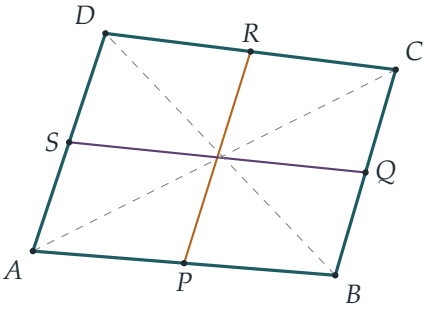
순수수학 • 기하에서의 벡터

> **STEP I 1997, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q5

핵심 아이디어

길이의 제곱은 내적(dot product)이고 중점(mid-point)은 평균이므로, 위치 벡터(position vector)를 쓰면 항등식 전체가 대수 계산으로 바뀐다. 유용한 요령은 양변 모두에 사실은 대각선(diagonal) AC와 BD가 숨어 있다는 것을 알아차리는 것이다. 각 차를 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$로 나타내고 나면 항등식은 저절로 나온다. 그다음의 추론에는 네 막대의 길이가 결코 변하지 않는다는 사실만 있으면 된다.

풀이



임의의 원점에 대한 A, B, C, D의 위치 벡터를 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$라 하고, $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$로 쓰자. 중점은 다음과 같다.

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}).$$

네 변

각각을 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$로 전개하면, 제곱항 $|\mathbf{a}|^2, \ldots, |\mathbf{d}|^2$는 양쪽에 한 번씩 나타나 소거되고, 다음이 남는다.

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 &= -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ &= 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}).\end{aligned}$$

($(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b})$를 전개하여 이 인수분해(factorisation)를 확인해 보라.) 말로 하면, 이것은 $-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$이다.

중점을 잇는 두 선분

다음과 같이

$$\overrightarrow{PR} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{u}, \qquad \overrightarrow{QS} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{v},$$

라 두자.

> **생각해 보기** 네 항짜리 제곱 두 개를 전개하지 않고 $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$를 어떻게 구할 수 있을까?

벡터에 대한 제곱의 차 공식 $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})$를 쓴다. 이 식은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$이기 때문에 성립한다. 여기서

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = 2(\mathbf{d}-\mathbf{b}), \qquad \mathbf{u}-\mathbf{v} = 2(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

이므로

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{4}(|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2) = (\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

함께 합치기

변에 대한 결과에 중점에 대한 결과의 두 배를 더하면

$$\begin{aligned}&|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 + 2(|PR|^2 - |QS|^2) \\ &\quad = 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) + 2(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = 0,\end{aligned}$$

이고, 이를 정리하면

$$|AB|^2 + |CD|^2 + 2|PR|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|QS|^2,$$

이므로 증명이 끝난다. 볼록성(convexity)은 물론이고 점들이 한 평면 위에 있다는 사실조차 쓰지 않았으므로, 이 항등식은 임의의 네 점에 대해 성립한다. 접혀서 두 막대가 서로 교차하는 사각형도 마찬가지이다.

추론

항등식을 정리하면

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{2}(|AD|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 - |CD|^2).$$

막대는 단단하므로, 이음매가 어떻게 움직이든 우변의 네 길이는 변하지 않는다. 따라서 $|PR|^2 - |QS|^2$는 움직이는 동안 내내 일정하다. 같은 말로, 대각선 자체는 길이와 방향이 바뀌더라도 대각선의 스칼라곱(scalar product) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$는 고정된 채로 남는다.

검산

- 변의 길이가 a와 b인 직사각형에서는 $|AB| = |CD| = a$이고 $|AD| = |BC| = b$이며, PR과 QS는 마주 보는 변의 중점을 이으므로 $|PR| = b$, $|QS| = a$이다. 항등식의 양변은 모두 $2a^2 + 2b^2$이다.
- 마름모(rhombus)에서는 네 변이 모두 같으므로, 추론에 따르면 모든 위치에서 $|PR| = |QS|$이다. 실제로 마름모의 대각선은 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$이다.
- 수치적으로, 무작위 사각형 10^5개에 대해 항등식은 10^{-12} 이내의 오차로 성립한다. $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CD| = 5$, $|DA| = 6$인 연결 장치(linkage)를 약 200개의 위치로 움직여 보았을 때, $|PR|^2 - |QS|^2$는 내내 $\tfrac{1}{2}(36 + 16 - 9 - 25) = 9$로 유지되었다.

흔한 실수

- 어떤 변이 어떤 선분과 짝을 이루는지 혼동하는 것. PR은 AB와 CD의 중점을 잇고, 항등식에서 PR과 같은 쪽에 놓이는 것은 바로 이 두 변이다.
- A를 원점에, B를 축 위에 두는 식으로 좌표를 설정한 뒤, 일반적인 사각형이 되려면 나머지 모든 점이 자유로워야 한다는 것을 잊는 것. 벡터를 쓰면 이런 번거로운 관리를 피할 수 있다.

STEP 너머

점 P, Q, R, S는 항상 평행사변형을 이루며(바리뇽(Varignon)의 정리), PR, QS는 그 평행사변형의 대각선이다. 여기서의 항등식은 평행사변형 법칙(parallelogram law) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$의 사촌 격인데, 대학 1학년 선형대수학 강의에서 이 법칙은 내적(inner product)에서 나오는 노름(norm)을 정확히 특징짓는 성질로 다루어진다. 기계장치가 움직이는 동안에도 고정되어 있는 양, 곧 불변량(invariant)이라는 아이디어는 수학 전반에 걸쳐 거듭 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학

입문)는 점곱과 내적이 제대로 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.