풀이

STEP I 1997, 문제 4

순수수학 • 절댓값 방정식

> **STEP I 1997, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q4

핵심 아이디어

각 절댓값(modulus) 항은 그 안의 식이 0이 되는 곳에서만 식의 꼴이 바뀌므로, 네 개의 "임계점(critical points)" $x = -1, 0, 1, 2$가 실수 전체를 다섯 개의 구간(interval)으로 나눈다. 각 구간에서는 모든 절댓값을 부호가 정해진 보통의 괄호로 바꿀 수 있고, 좌변은 일차함수(linear function)가 되며, 방정식은 쉽게 풀린다. 단 하나 주의할 점은, 일차방정식의 근(root)은 지금 다루고 있는 구간 안에 있을 때에만 해로 인정된다는 것이다.

풀이

$L(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2|$라 하자. $t \geq 0$일 때 $|t| = t$이고 $t < 0$일 때 $|t| = -t$임을 기억하자. 구간을 오른쪽에서 왼쪽으로 차례로 살펴본다.

$x \geq 2$. 네 절댓값 안의 식이 모두 음이 아니므로

$$\begin{aligned} L(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) \\ &= x + 1 - x + 3x - 3 - 2x + 4 = x + 2. \end{aligned}$$

방정식은 $x + 2 = x + 2$가 되고, 이는 **모든** $x \geq 2$에 대하여 참이다. 따라서 구간 $x \geq 2$ 전체가 해이다.

> ? **생각해 보기** 방정식이 항등식(identity)이 되어 버렸다. 계산 실수를 한 것일까?

그렇지 않다. $x \to \infty$일 때 절댓값 안의 x의 계수(coefficient)를 더하면 $1 - 1 + 3 - 2 = 1$이고 상수항을 더하면 $1 - 0 - 3 + 4 = 2$인데, 이는 우변 $x + 2$와 정확히 일치한다. 절댓값을 포함한 방정식은 얼마든지 구간 전체를 해로 가질 수 있으며, 문제의 "모든 해를 구

하라"라는 말은 이런 일이 일어날 수 있다는 힌트이다. 간단히 확인해 보면, $x = 3$에서 $L(3) = 4 - 3 + 6 - 2 = 5 = 3 + 2$이다.

$1 \le x < 2$. 이제 $x - 2 < 0$이므로 $|x - 2| = -(x - 2)$이고

$$L(x) = (x + 1) - x + 3(x - 1) + 2(x - 2) = 5x - 6.$$

그러면 $5x - 6 = x + 2$에서 $x = 2$인데, 이는 $[1, 2)$에 속하지 않는다. (이것은 해이지만 이미 앞에서 세었다.) 새로운 해는 없다.

$0 \le x < 1$. 이제 $x - 1 < 0$이기도 하므로

$$L(x) = (x + 1) - x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = -x.$$

그러면 $-x = x + 2$에서 $x = -1$인데, 이는 $[0, 1)$에 속하지 않는다. 해가 없다.

$-1 \le x < 0$. 이제 $|x| = -x$이기도 하므로

$$L(x) = (x + 1) + x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = x.$$

방정식 $x = x + 2$는 해가 전혀 없다.

$x < -1$. 네 절댓값 안의 식이 모두 음수이므로

$$L(x) = -(x + 1) + x - 3(x - 1) + 2(x - 2) = -x - 2.$$

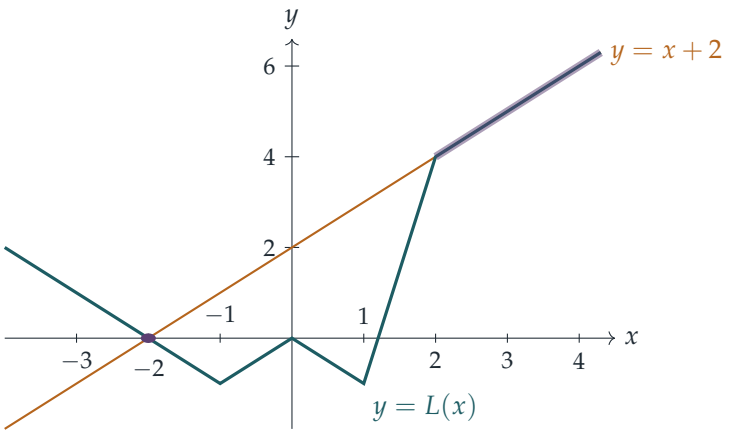
그러면 $-x - 2 = x + 2$에서 $x = -2$이고, $-2 < -1$이므로 이것은 진짜 해이다. 확인: $L(-2) = 1 - 2 + 9 - 8 = 0 = -2 + 2$.

결론. 해는

$$x = -2 \qquad \text{그리고 모든} x \ge 2.$$

이다.

그래프를 보면 그 이유를 알 수 있다. $y = L(x)$(청록색)는 선분들이 이어진 지그재그 모양으로, 직선 $y = x + 2$(호박색)와 $x = -2$에서 한 번 만나고, $x = 2$부터는 그 직선과 겹쳐 놓인다.



검산

몇 가지 값을 대입해 보자. $L(-2) = 0 = -2 + 2$, $L(5) = 6 - 5 + 12 - 6 = 7 = 5 + 2$이고, 한편 $x = 0$에서는 $L(0) = 1 + 3 - 4 = 0 \neq 2$이다. 정확한 분수로 계산하는 컴퓨터로 100,000개의 무작위 점에서 L의 다섯 가지 일차식을 확인하였고, $[-20, 20]$ 위의 간격 0.01인 격자점에서 방정식이 $x = -2$와 $x \geq 2$인 모든 격자점에서 정확히 성립하며 그 밖의 곳에서는 성립하지 않음을 확인하였다.

흔한 실수

- $x \geq 2$에서 $x + 2 = x + 2$를 얻고 나서, 구간 전체가 해라는 것을 알아차리지 못하고 "해 없음"이라고 쓰거나 "해가 무수히 많으니 뭔가 잘못되었다"고 생각하는 것.
- ($0 \leq x < 1$에서 나온) $x = -1$처럼 지금 다루는 구간 밖에 있는 근을 해로 받아들이는 것.
- 고립된 해 $x = -2$가 있는 바깥 영역 $x < -1$을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

L과 같은 함수를 **조각별 선형**(*piecewise linear*) 함수라 한다. 즉 연속(continuous)이고, 유한 개의 "꺾이는 점" 사이에서는 일차함수이다. 이런 함수는 선형계획법(linear programming)과 최적화(optimisation)에서 핵심적인 역할을 하는데, 여기서 절댓값의 합 $\sum |x - a_i|$를 최소화하면 평균(mean)이 아니라 중앙값(median)이 나온다. 또한 이 함수들은 연속이지만 고립된 점에서 미분가능(differentiable)하지 않은 함수의 첫 번째 예이기도 하며, 이 주제는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해)에서 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.