풀이

STEP I 1997, 문제 3

순수수학 • 거듭제곱과 일의 자리 숫자

> **STEP I 1997, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q3

핵심 아이디어

무엇보다 먼저 a_7을 3의 거듭제곱 하나로 나타낸다. 3의 거듭제곱을 세제곱하면 지수가 세 배가 될 뿐이다. 그다음부터 각 소문항은 하나의 엄청나게 큰 수에 대해 서로 다른 질문을 던진다. 3의 거듭제곱의 일의 자리 숫자(units digit)는 주기(period) 4로 반복되므로, 일의 자리 숫자는 지수를 4로 나눈 나머지(modulo)에만 의존한다. 크기에 대한 부등식은 10의 거듭제곱과의 거친 비교만으로 충분하다. 마지막 소문항은 이 크기 부등식에 기댄다. a_7이 매우 크므로 $1/a_7$은 무시할 수 있을 만큼 작다.

풀이

먼저 닫힌 형태(closed form)를 구한다. $a_n = 3^k$이면 $a_{n+1} = (3^k)^3 = 3^{3k}$이므로, 한 단계마다 지수에 3이 곱해진다. $a_1 = 3^1$에서 시작하면 수학적 귀납법(induction)에 의해

$$a_n = 3^{3^{n-1}}, \qquad \text{따라서} \qquad a_7 = 3^{3^6} = 3^{729}.$$

소문항 (i)

곱의 일의 자리 숫자는 각 인수의 일의 자리 숫자에만 의존한다. 따라서 직전의 일의 자리 숫자에 3을 곱하고 그 결과의 일의 자리 숫자만 남기는 방식으로 3^k의 일의 자리 숫자를 추적할 수 있다.

k	1	2	3	4	5	$\cdots$
일의 자리 숫자: 3^k	3	9	7	1	3	$\cdots$

$k = 4$에서 다시 1이 되면, 그 뒤로는 $3, 9, 7, 1$이라는 패턴이 주기 4로 반복된다. (달리 말하면 $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$이므로 $3^{4m+r} \equiv 3^r \pmod{10}$이다.)

생각해 보기 긴 나눗셈을 하지 않고 729를 4로 나눈 나머지를 어떻게 구할 수 있을까?

$3 \equiv -1 \pmod 4$이므로 $3^6 \equiv (-1)^6 = 1 \pmod 4$이다. (직접 계산하면 $729 = 4 \times 182 + 1$이다.) 따라서 $3^{729} = 3^{4\cdot 182+1}$의 일의 자리 숫자는 3^1의 일의 자리 숫자와 같고,

정리하면a_7의 일의 자리 숫자는3.

소문항 (ii)

지수를 셋씩 묶는다. $729 = 3 \times 243$이므로

$$a_7 = 3^{729} = \left(3^3\right)^{243} = 27^{243} > 10^{243} \geq 10^{100},$$

이다. 여기서 $27 > 10$이라는 사실(그리고 양수들을 같은 양의 지수로 거듭제곱해도 대소 관계가 유지된다는 사실)을 이용했다. 따라서 요구한 대로 $a_7 \geq 10^{100}$이다. 이 부등식은 전혀 빠듯하지 않다. 실제로 a_7은 348자리 수이다.

소문항 (iii)

분수를 나눈다.

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_7}.$$

$a_7 > 0$이므로 둘째 항은 양수이다. 소문항 (ii)에 의해 이 항은 또한 아주 작다.

$$0 < \frac{1}{2a_7} \leq \frac{1}{2 \times 10^{100}} < 10^{-100}.$$

그러므로

$$0.5 < \frac{a_7 + 1}{2a_7} < 0.5 + 10^{-100} < 0.505.$$

0.5보다 크고 0.505보다 작은 모든 수는 소수점 아래 둘째 자리까지 반올림하면 0.50이 된다. 소수점 아래 셋째 자리가 0이어서, 올림이 일어나는 5에 한참 못 미치기 때문이다. 따라서

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = 0.50 \quad \text{(소수점 아래 둘째 자리까지 반올림)}$$

이다. 실제로 이 수의 소수 전개는 $0.5000\ldots$로 시작하며, 5 뒤에 적어도 100개의 0이 이어진다.

검산

컴퓨터는 3^{729}를 정확하게 다룰 수 있다. 3을 여섯 번 세제곱하여 계산해 보면 $a_7 = 3^{729}$가 일의 자리 숫자가 3인 348자리 수임을, 그리고 $27^{243} = 3^{729} > 10^{243}$임을 확인할 수 있다. 정확

한 분수 계산을 이용하면 $\frac{a_7+1}{2a_7}$이 $\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{2}+10^{-100}$ 사이에 (양 끝을 포함하지 않고) 놓임을 확인할 수 있다. 더 작은 규모에서 소문항 (i)의 방법을 시험해 볼 수도 있다. $a_2 = 3^3 = 27$의 지수는 $3 \equiv 3 \pmod 4$이므로 일의 자리 숫자가 7이라고 예측되는데, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- a_7을 3^{3^6}이 아니라 $3^{3\cdot 7}$이나 3^{18}로 읽는 것. 각 단계에서 지수에 3을 더하는 것이 아니라 3을 곱한다.
- 지수를 4가 아니라 10으로 나눈 나머지로 줄이는 것. 일의 자리 숫자는 주기 4로 순환하므로, 중요한 것은 지수를 4로 나눈 나머지이다.
- 소문항 (iii)에서 아무 근거 없이 "0.5"라고 쓰는 것. "소수점 아래 둘째 자리까지 정확하게"는 0.50을 뜻하며, 그 값이 0.505에 이를 수 없음을 보이는 부등식이 필요하다.

STEP 너머

소문항 (i)은 모듈러 산술(modular arithmetic)과 오일러(Euler) 정리(Euler's theorem)를 처음 맛보는 경험이다. $\varphi(10) = 4$이기 때문에 $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$이 성립한다. 정수론 학자들은 이러한 축소를 탑의 층마다 반복해서 적용하여 $3^{3^{3^3}}$와 같은 거대한 거듭제곱 탑(power tower)의 마지막 자릿수들을 구한다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruence)과 원소의 위수(order)를 처음부터 차근차근 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.