풀이

STEP I 1997, 문제 2

순수수학 • 역삼각함수의 도함수

STEP I 1997, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q2

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 f의 도함수(derivative)가 0이 되어 버리므로 f는 상수이다. 다만 이는 정의된 각 구간 위에서만 성립한다. 점 $x = -1$이 실수 전체를 둘로 나누고, 양쪽에서 상수가 서로 다르다. 소문항 (ii)에서는 x를 y에 대해 미분한 다음 그 결과를 뒤집는(역수를 취하는) 편이 더 쉽다. 핵심 작업은 $\sin y^2$와 $\cos y^2$를 x와 y로 다시 쓰는 것이며, 바로 여기서 y의 범위가 중요해진다.

풀이

소문항 (i)

이 함수는 모든 $x \neq -1$에서 정의된다. $u = \dfrac{1-x}{1+x}$로 놓자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}, \qquad 1+u^2 = \frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$(연쇄법칙(chain rule))를 이용하면

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad (x \neq -1). \end{aligned}$$

생각해 보기 $\mathrm{f}'(x) = 0$이라는 것은 f가 모든 곳에서 같은 상수라는 뜻인가?

그렇지 않다. 도함수가 0이면 함수는 **구간**(interval) 위에서만 상수가 된다(이는 평균값 정리(mean value theorem)에서 나온다). f의 정의역(domain)은 $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$로 두 개의 구간이므로, f는 각 조각에서 상수이고 두 상수는 서로 다를 수 있다. 각 상수는 편리한 점에서 값을 계산하거나 극한을 취해서 구한다.

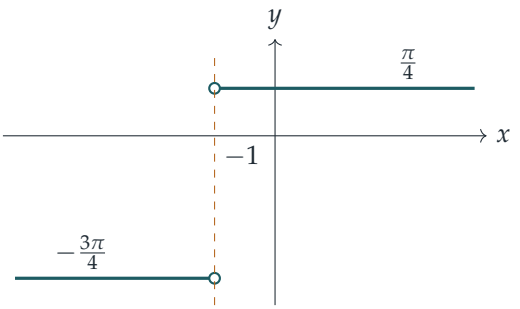
$x>-1$일 때: $x=0$을 대입한다. 그러면 $\mathrm{f}(0)=\tan^{-1}0+\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$이다.

$x<-1$일 때: $x\to-\infty$로 보낸다. 그러면 $\tan^{-1}x\to-\frac{\pi}{2}$이고, $\dfrac{1-x}{1+x}\to-1$이므로 $\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\to-\frac{\pi}{4}$이다. f는 이 구간에서 상수이므로, 그 상수는 극한값 $-\frac{3\pi}{4}$와 같다. (또는 $x=-\sqrt{3}$을 대입하면 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-(2+\sqrt{3})=-\tan\frac{5\pi}{12}$이므로 $\mathrm{f}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=-\frac{3\pi}{4}$이다.)

따라서

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & x>-1,\\[2mm] -\dfrac{3\pi}{4}, & x<-1.\end{cases}$$

$x=-1$에서 π만큼 값이 뛰는 것은 그곳에서 $\dfrac{1-x}{1+x}$가 $-\infty$에서 $+\infty$로 급격히 바뀌어, 그 역탄젠트(inverse tangent)가 $-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$로 뛰어오르기 때문이다.



소문항 (ii)

곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙을 이용하여 $x=y\sin y^2$를 y에 대해 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\sin y^2+2y^2\cos y^2.$$

이제 두 삼각함수 항을 모두 x와 y로 나타낸다.

► $y>0$이므로 y로 나눌 수 있다: $\sin y^2=\dfrac{x}{y}$.

- $0 < y^2 < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos y^2 > 0$이고, 따라서 양의 제곱근을 택한다:

$$\cos y^2 = \sqrt{1 - \sin^2 y^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y},$$

  여기서 마지막 단계에서는 $\sqrt{y^2} = y$를 이용하였는데, 이는 $y > 0$이므로 성립한다.

따라서

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + 2y\sqrt{y^2 - x^2} = \frac{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}}{y}.$$

$x > 0, y > 0$이고 제곱근은 음이 아니므로 이 값은 엄밀히 양수이다. 따라서 역수를 취할 수 있다(역함수의 미분법(inverse function rule) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$는 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \neq 0$인 곳에서 성립한다):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

? 생각해 보기 문제에서 왜 $0 < y < (\pi/2)^{1/2}$라는 조건을 고집하는가?

이 조건이 없으면 $\cos y^2$가 음수일 수 있고, 그러면 올바른 공식에서는 제곱근 앞에 마이너스 부호가 붙어야 한다. 또한 이 제한 덕분에 이 범위에서 $y \sin y^2$는 순증가(strictly increasing)한다(위에서 구한 도함수가 양수이다). 그 값은 0에서 $(\pi/2)^{1/2}$까지 증가하므로, $0 < x < (\pi/2)^{1/2}$인 각 x에 정확히 하나의 y가 대응하고, y는 실제로 x의 함수가 된다.

검산

- 소문항 (i): $\mathrm{f}(1) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$이고 $\mathrm{f}(-3) = \tan^{-1}(-3) + \tan^{-1}(-2) \approx -1.2490 - 1.1071 = -2.3562 \approx -\frac{3\pi}{4}$이다. 두 상수를 무작위로 고른 10,000개의 점에서 확인하였다.
- 소문항 (ii): $x = 0.5$일 때 $y \sin y^2 = 0.5$를 수치적으로 풀면 $y \approx 0.81355$이고, 공식은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx 0.60284$를 준다. 이는 수치적으로 구한 역함수를 유한 차분(finite difference)으로 미분한 값과 일치한다.
- $x = 0$ 근처에서 $y \sin y^2 \approx y^3$이므로 $y \approx x^{1/3}$이고 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{1}{3y^2}$이다. 공식은 $y/(y^3 + 2y^3) = \frac{1}{3y^2}$를 주므로 서로 일치한다.

흔한 실수

- 모든 x에 대해 $\mathrm{f}(x) = \frac{\pi}{4}$라고 결론짓고, $x = -1$이 정의역을 나눈다는 사실을 잊는 것.
- $\cos y^2 = \pm\sqrt{\cdots}$라고 쓰고 왜 양의 제곱근이 옳은지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

$f' = 0$이면 정의역의 연결된(connected) 조각 위에서만 상수가 된다는 사실은 평균값 정리의 결과이며, 평균값 정리는 대학 해석학(analysis) 과정에서 처음 만나는 중요한 결과 중 하나이다. 소문항 (ii)는 역함수 정리(inverse function theorem)의 아주 간단한 경우이다. 도함수가 0이 아닌 함수는 국소적으로(locally) 역함수를 가지며, 역함수의 도함수는 원래 도함수의 역수이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 두 가지를 꼼꼼히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.