풀이

STEP I 1997, 문제 13

확률과 통계 • 조건부 확률

> **STEP I 1997, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q13

핵심 아이디어

Blond 씨가 전등을 켜야 하는지는 어떤 종류의 함정이 기다리고 있는지에만 달려 있다. 따라서 문제 전체는 하나의 조건부확률(conditional probability)로 귀결된다. 바로 카나리아가 없다는 조건 아래에서 함정이 폭탄이 아니라 아나콘다일 확률이다. 암살자가 누구인지는 어떤 무기가 쓰이는지에 영향을 주기 때문에만 의미가 있다. 그러므로 두 단계(암살자, 그다음 무기)를 전확률 법칙(law of total probability)으로 결합하고, "카나리아 없음"을 조건으로 둔 다음, 두 가지 사망 위험을 비교한다.

풀이

설정하기

$i = 1, 2, 3, 4$에 대하여 M_i를 Mr i가 함정을 설치한 사건이라 하고, A, B, C를 각각 함정이 아나콘다, 폭탄, 카나리아인 사건이라 하자. 주어진 조건은 다음과 같다.

$$P(M_i) = \frac{i}{10}, \qquad P(A \mid M_i) = \frac{i+1}{10}, \quad P(B \mid M_i) = \frac{i}{10}, \quad P(C \mid M_i) = \frac{9-2i}{10}.$$

이 값들은 서로 모순이 없다. $\frac{1+2+3+4}{10} = 1$이고, 각 i에 대하여 세 무기의 확률은 음이 아니며 그 합은 $\frac{(i+1)+i+(9-2i)}{10} = 1$이다. 암살자도 정확히 한 명, 무기도 정확히 하나이므로 사건 $M_i \cap A$, $M_i \cap B$, $M_i \cap C$는 모든 경우를 분할(partition)한다.

침묵이 알려 주는 것

전확률 법칙에 의하여

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(A \mid M_i) = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5}{100} = \frac{40}{100},$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(B \mid M_i) = \frac{1 + 4 + 9 + 16}{100} = \frac{30}{100}.$$

따라서 $P(C') = P(A) + P(B) = \frac{70}{100}$이다. (검산하면 $P(C) = \frac{7+10+9+4}{100} = \frac{30}{100}$이다.)

생각해 보기 지금 어느 암살자일 가능성이 가장 큰지 계산해야 할까?

그렇지 않다. 노랫소리가 들리지 않았다는 사실은 각 암살자에 대한 확률을 바꾸기는 하지만, 사망 위험은 무기에만 달려 있다. $A \subseteq C'$이고 $B \subseteq C'$이므로, C'을 조건으로 두는 것은 두 확률의 크기를 같은 비율로 조정하는 것일 뿐이다.

$$P(A \mid C') = \frac{P(A)}{P(C')} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}, \qquad P(B \mid C') = \frac{P(B)}{P(C')} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

암살자에 대한 정보는 이미 이 두 수 안에 반영되어 있다.

두 선택 비교하기

K를 Blond 씨가 죽는 사건이라 하자. C'을 조건으로 두면 함정은 아나콘다이거나 폭탄이고, 그의 운명은 함정과 그의 선택에만 달려 있다.

전등을 켤 때. 폭탄은 확률 $\frac{1}{2}$로 그를 죽이고, 아나콘다는 확률 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$으로 그를 죽인다. 따라서

$$P(K \mid C',\ 켬) = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{42} + \frac{8}{42} = \frac{17}{42}.$$

전등을 끌 때. 폭탄은 절대 그를 죽이지 않고, 아나콘다는 확률 $\frac{1}{2}$로 그를 죽인다. 따라서

$$P(K \mid C',\ 끔) = \frac{3}{7}\cdot 0 + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{7} = \frac{12}{42}.$$

$\frac{12}{42} < \frac{17}{42}$이므로 **Blond 씨는 전등을 켜지 않고 아파트에 들어가야 한다.** 이때 그가 살아남을 확률은 $\frac{5}{7}$(약 71%)이며, 전등을 켜면 $\frac{25}{42}$(약 60%)이다.

그 이유는 아나콘다가 더 가능성이 큰 함정이지만, 전등이 실제로 상황을 악화시키는 것은 폭탄 쪽이기 때문이다. 전등을 켜면 아나콘다의 위험은 $\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{3}$으로 줄어들지만 폭탄의 위험은 0에서 $\frac{1}{2}$로 늘어난다. 아나콘다일 확률이 $\frac{4}{7}$이므로 전등은 $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{42}$만큼 이득을 주고, 폭탄일 확률이 $\frac{3}{7}$이므로 $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{42}$만큼 손해를 준다. 손해가 더 크다.

검산

- 그가 귀를 기울이기 전이라면, 위험은 전등을 켤 때 $\frac{30}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{40}{100} \cdot \frac{1}{3}$, 끌 때 $\frac{40}{100} \cdot \frac{1}{2}$이다. 이는 위의 답에 $\frac{7}{10}$을 곱한 것으로, 카나리아는 어느 쪽 비교에도 기여하지 않으므로 마땅히 그래야 한다.
- 전등을 끄는 전략은 $p = P(A \mid C')$가 $\frac{1}{2}p < \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{3}p$를 만족할 때, 즉 $p < \frac{3}{4}$일 때 언제나 더 낫다. 여기서 $p = \frac{4}{7}$이므로 이 기준보다 넉넉히 작다.
- 10^6번의 저녁을 시뮬레이션(simulation)하면 사망률이 전등을 켤 때 약 0.404, 끌 때 약 0.286으로 나오며, 이는 $\frac{17}{42} \approx 0.405$, $\frac{2}{7} \approx 0.286$과 일치한다.

흔한 실수

- "카나리아 없음"을 조건으로 두는 것을 잊고, $P(A) = 0.4$와 $P(B) = 0.3$을 그것이 전부인 것처럼 사용하는 것. 결론은 같게 나오지만 사망 확률은 틀린다.
- 생존과 사망을 혼동하는 것. 전등을 켰을 때 아나콘다에 대한 수치는 **생존** 확률 $\frac{2}{3}$이므로, 사망 확률은 $\frac{1}{3}$이다.
- 암살자들이 같은 확률을 가진다고 보거나, 암살자 단계를 무시하고 무기 확률들의 평균을 내는 것.

STEP 너머

이것은 **결정 이론**(decision theory)의 작은 문제이다. 사후 분포(posterior distribution) 아래에서 기대 손실(expected loss)을 최소화하는 행동을 고르는 것이며, 여기서 "손실"은 그저 사망 확률이다. $P(A \mid C')$만이 중요하다는 관찰, 그리고 최선의 행동이 바뀌는 문턱값 $p < \frac{3}{4}$는 이러한 결정을 분석하는 전형적인 방식을 보여 준다. 즉 자료는 사후 분포를 바꾸고, 사후 분포는 행동을 결정한다. 조건부확률과 베이즈 갱신(Bayesian updating)에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.