풀이

STEP I 1997, 문제 11

역학 • 저항을 받는 운동

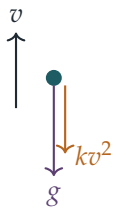
> **STEP I 1997, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q11

핵심 아이디어

저항력(resistance)은 속도에 따라 달라지는데, 우리가 원하는 것은 시간이 아니라 **거리**의 함수로서의 속도이다. 그래서 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\frac{1}{2}v^2)$로 쓴다. $w = v^2$을 미지함수로 잡으면 운동 방정식은 **선형** 1계 미분방정식(linear first-order equation)이 되고, 적분인자(integrating factor)를 쓰면 곧바로 풀린다. 마지막 소문항은 하나의 물리적 사실에 달려 있다. 저항력은 언제나 운동을 방해하므로, 입자가 방향을 바꾸면 저항력의 방향도 바뀐다.

풀이

입자를 연직선 위에서 움직이는 단위 질량의 점으로 모형화하고, 이 입자에 무게 g(아래 방향)와 속도의 반대 방향으로 크기 kv^2인 저항력이 작용한다고 하자. s는 발사한 지점에서 위쪽으로 잰다.



올라갈 때



내려올 때

위로 올라가는 운동

입자가 올라가는 동안 속도 v는 위쪽을 향하므로, 저항력 kv^2은 무게와 함께 아래쪽으로 작용한다. 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(질량 1)에 의해

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g - kv^2,$$

이다. 여기서 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$를 이용하였다. $w = v^2$으로 두면 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} + 2kw = -2g.$$

이 식은 w에 대하여 선형이다. 적분인자 e^{2ks}를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(w\,\mathrm{e}^{2ks}) = -2g\,\mathrm{e}^{2ks} \quad\Longrightarrow\quad w\,\mathrm{e}^{2ks} = -\frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{2ks} + C.$$

$s = 0$일 때 $w = u^2$이므로 $C = u^2 + \frac{g}{k}$이다. 따라서

$$v^2 = \left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2ks} - \frac{g}{k} = u^2\mathrm{e}^{-2ks} + \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{-2ks} - 1),$$

이고, 이것이 구하려던 $(*)$이다. $(v\,\mathrm{d}v/(g + kv^2) = -\mathrm{d}s$로 변수분리(separation of variables)하여 로그를 얻는 방법도 똑같이 잘 된다.)

최고 높이

입자는 $v = 0$일 때 상승을 멈춘다. $(*)$의 우변은 s에 대하여 순감소하므로 이런 일은 정확히 한 번, 최고 높이 H에서 일어난다. $(*)$에 $v = 0$을 대입하면

$$\left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2kH} = \frac{g}{k} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{2kH} = 1 + \frac{ku^2}{g},$$

이므로

$$H = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{ku^2}{g}\right).$$

내려오는 경로

생각해 보기 $(*)$를 유도할 때 운동 방향은 한 번도 언급되지 않았다. 그렇다면 왜 이 식이 계속 성립하면 안 되는가?

사실 유도 과정에서는 저항력의 부호를 통해 방향을 사용하였다. 내려올 때는 속도가 아래쪽을 향하므로, 저항력 kv^2은 이제 무게와 반대인 **위쪽**으로 작용한다. s는 여전히 위쪽으로 재고 v는 위 방향 속도로 두면, 방정식은

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g + kv^2, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - 2kw = -2g,$$

가 되어 다른 미분방정식이 된다. 그러므로 내려오는 경로에서는 $(*)$가 성립하지 않는다.

이를 구체적으로 확인하기 위해 $s = H$에서 $w = 0$이라는 조건으로 새 방정식을 풀어 보자. 적분인자 e^{-2ks}를 쓰면 $w = \frac{g}{k} + D\mathrm{e}^{2ks}$를 얻고, $w(H) = 0$이므로 $D = -\frac{g}{k}\mathrm{e}^{-2kH}$이어야 한다.

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2k(H-s)}\right) \qquad (0 \le s \le H).$$

$u^2 + \frac{g}{k} = \frac{g}{k}\mathrm{e}^{2kH}$를 이용하면 식 $(*)$는 $v^2 = \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{2k(H-s)} - 1)$로 쓸 수 있다. $x = 2k(H-s) \ge 0$으로 두면 두 식은 각각 $\frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-x})$와 $\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{x} - 1)$이고,

$$(\mathrm{e}^{x} - 1) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2 = (\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2})^2 > 0 \quad \text{단, } x > 0.$$

따라서 $(*)$는 꼭대기보다 아래의 모든 점에서 틀린 속력을 준다(두 식은 둘 다 0이 되는 $s = H$에서만 일치한다). 즉 $(*)$는 내려올 때의 속력을 실제보다 크게 어림한다.

빠른 물리적 논증도 있다. 식 $(*)$는 v^2을 높이만의 함수로 주므로, 만약 이 식이 내려올 때도 성립한다면 입자는 각 높이를 올라갈 때와 같은 속력으로 지나고, 출발점에 속력 u로 돌아올 것이다. 그러나 저항력은 운동 내내 음의 일을 하므로 입자는 에너지를 잃었고, 따라서 더 느리게 돌아와야 한다. 실제로 $s = 0$에서 올바른 공식은

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \frac{1}{1 + ku^2/g}\right) = \frac{u^2}{1 + ku^2/g} < u^2.$$

을 준다.

검산

- $k \to 0$일 때 $\ln(1 + ku^2/g) \approx ku^2/g$이므로 $H \to u^2/(2g)$가 되어 익숙한 저항이 없을 때의 높이가 나온다. 또 $(*)$는 $v^2 = u^2 - 2gs$로 수렴한다($\mathrm{e}^{-2ks} \approx 1 - 2ks$로 전개하면 된다).
- 수치적으로 $u = 10$, $k = 0.05$, $g = 9.8$로 두고 운동 방정식을 단계별로 계산하면 $H \approx 4.1224$를 얻는데, 이는 $\frac{1}{0.1}\ln(1 + \frac{5}{9.8}) = 4.12245$와 일치한다. 입자는 $v^2 \approx 66.22$로 돌아오며, 이는 $u^2 = 100$이 아니라 $u^2/(1 + ku^2/g)$와 일치한다. 절반쯤 내려왔을 때 $v^2 \approx 36.51$인 반면 $(*)$는 44.87을 준다.

흔한 실수

- 운동 전체에 대한 하나의 방정식에서 저항력을 $-kv^2$으로 쓰는 것: $v^2 \ge 0$이므로 이 항은 언제나 같은 방향을 가리키며, 바로 이 때문에 하나의 공식으로 두 구간을 모두 다룰 수 없다. (하나의 방정식으로 쓰려면 $-kv|v|$가 필요하다.)

▶ $\frac{dv}{dt}$를 써서 v를 t에 대한 식으로 푼 다음, t를 소거하느라 고생하는 것: $v\,\frac{dv}{ds}$를 쓰면 곧장 답에 이른다.

STEP 너머

속도의 제곱에 비례하는 항력(quadratic drag)은 공기 중을 빠르게 움직이는 공에 대한 좋은 모형이며, 내려오는 운동의 방정식은 **종단 속도**(terminal velocity)를 보여 준다. 낙하가 길어질수록 $v^2 \to g/k$가 된다. 항력을 $-kv|v|$로 쓰면 운동 전체에 대한 하나의 비선형 방정식을 얻는데, 대학 1학년 역학의 많은 부분이 이처럼 힘이 속도에 따라 달라지고 에너지가 보존되지 않는 방정식을 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘과 종단 속도를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.