풀이

STEP I 1997, 문제 10

역학 • 원운동

> **STEP I 1997, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q10

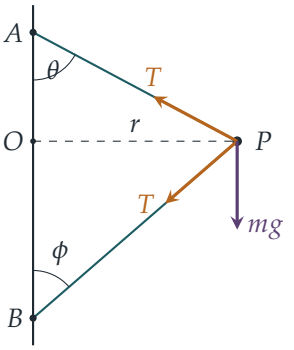
핵심 아이디어

고리가 매끄러우므로(smooth) 줄은 고리를 자유롭게 통과하고, 따라서 장력(tension)은 P의 양쪽에서 **같다**. 연직 방향(연직 가속도는 없다)과 수평 방향(축을 향하는 가속도 $r\omega^2$)으로 힘을 분해(resolve)한 다음, 한 식을 다른 식으로 나누어 T와 m을 소거한다. 그러면 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formulae)에 의해 그 비가 반각(half-angle)의 탄젠트 하나로 바뀐다.

풀이

모형과 힘

P를 가볍고 늘어나지 않는 줄(light inextensible string)에 꿰어진 입자로 본다. 고리가 매끄러우므로 장력 T는 PA와 PB에서 같다. 원의 중심을 O라 하자. O는 직선 AB 위에 있고 $OP = r$이다. P에 작용하는 힘은 무게 mg, PA 방향의 장력 T, PB 방향의 장력 T이다.



줄 PA는 연직선과 각 θ를 이룬다(A에서 AB와 AP 사이의 각). 따라서 이 줄이 P를 당기는 힘은 위쪽으로 $T\cos\theta$, 축을 향해 $T\sin\theta$의 성분을 가진다. 마찬가지로 PB는 B에서 연직선과 각 ϕ를 이루며, 이 줄이 P를 당기는 힘은 **아래쪽으로** $T\cos\phi$, 축을 향해 $T\sin\phi$의 성분을 가진다.

운동 방정식

P는 수평인 원 위를 일정한 속력으로 움직이므로 연직 가속도는 없고, O를 향하는 가속도 $r\omega^2$를 가진다. 힘을 분해하면 운동 방정식(equations of motion)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{연직 방향:} \quad & T\cos\theta - T\cos\phi = mg, \\ \text{수평 방향:} \quad & T\sin\theta + T\sin\phi = mr\omega^2. \end{aligned}$$

이 식들은 삼각형의 모양과 관계없이 성립한다(예를 들어 P가 A보다 위에 있다면 $\cos\theta$가 음수가 될 뿐이다). $mg > 0$이므로 첫 번째 식에서 $\cos\theta > \cos\phi$, 즉 $\phi > \theta$이다. 그림에서 보듯이 아래쪽 줄이 축에 대해 더 가파르게 기울어져 있다.

결과 보이기

연직 방향의 식을 수평 방향의 식으로 나누면

$$\frac{\cos\theta - \cos\phi}{\sin\theta + \sin\phi} = \frac{g}{r\omega^2}.$$

합을 곱으로 바꾸는 공식에 의해

$$\begin{aligned} \cos\theta - \cos\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\ \sin\tfrac{1}{2}(\phi-\theta), \\ \sin\theta + \sin\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\ \cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta). \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$이고 $0 < \phi < \pi$이므로(이들은 실제 삼각형 APB의 각이다) $0 < \frac{1}{2}(\theta+\phi) < \pi$이다. 따라서 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$이고, 이를 약분하면

$$\tan\frac{\phi-\theta}{2} = \frac{g}{r\omega^2},$$

이 되어 증명이 끝난다.

장력

> **생각해 보기** 답에는 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$가 들어가도 되지만 $\phi-\theta$는 들어가면 안 된다. $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)$를 어떻게 없앨 수 있을까?

수평 방향의 식과 두 번째 합을 곱으로 바꾸는 공식으로부터

$$2T\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta) = mr\omega^2.$$

우리는 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi - \theta)$의 **탄젠트**를 알고 있으므로, 대변이 g이고 이웃변이 $r\omega^2$인 직각삼각형으로부터 코사인을 구할 수 있다. $0 < \phi - \theta < \pi$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고 $\cos\alpha > 0$이다.

$$\cos\tfrac{1}{2}(\phi - \theta) = \frac{r\omega^2}{\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}.$$

이를 대입하고 $r\omega^2$을 약분하면

$$T = \frac{m\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}{2\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)}.$$

이 결과를 멋지게 이해하는 방법이 있다. $\sqrt{(mg)^2 + (mr\omega^2)^2}$은 두 장력의 합력(resultant)의 크기이고, 서로 각 $\pi - (\theta + \phi)$(각 APB)를 이루는 크기가 같은 두 힘 T의 합력의 크기는 $2T\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)$이다.

검산

- $\omega \to \infty$이면 우변은 0으로 가므로 $\phi \to \theta$이다. 고리는 바깥으로 튕겨 나가 AB의 중점과 같은 높이에 놓이게 되는데, 이는 중력을 무시할 수 있을 때 예상되는 결과이다.
- $\omega \to 0$이면 $\tan\frac{1}{2}(\phi - \theta) \to \infty$이므로 $\phi - \theta \to \pi$이다. 즉 줄이 곧게 아래로 늘어지는데, 회전이 없을 때 가능한 경우는 이것뿐이다.
- 수치적으로는 A, B, P를 무작위로 배치하고, 벡터 운동 방정식으로부터 T와 ω^2을 직접 구한 뒤, 좌표로부터 θ와 ϕ를 측정하여 두 결과와 비교하였다. 약 8000개의 경우에서 가장 큰 상대 오차는 3×10^{-12}였다.

흔한 실수

- 서로 다른 두 장력 T_1, T_2를 사용하는 것. 고리가 매끄러우면 줄은 하나이고 장력도 하나이다. 장력이 서로 다르다면 문제가 결정되지 않는다.
- PB의 장력의 연직 성분의 부호를 틀리는 것. 이 줄은 P를 B 쪽으로 **아래로** 당긴다.
- $\cos\frac{1}{2}(\phi - \theta)$에 대해 음의 제곱근을 택하는 것. 그러면 장력이 음수가 된다.

STEP 너머

줄의 길이가 주어지면 고리는 A와 B를 초점(foci)으로 하는 타원(ellipse) 위에 놓이고, 줄은 P에서의 접선과 같은 각을 이룬다. 이것이 타원의 반사 성질(reflection property)이다. 따라서 장력의 합력은 타원의 법선(normal) 방향을 향하는데, 이는 그 모양으로 구부린 매끄러운 철사의 수직항력(reaction)과 똑같다. 구속 조건(constraints)을 곡면에 수직인

힘으로 생각하는 것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 이런 종류의 회전계에 관한 문제가 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.