풀이

STEP I 1997, 문제 1

순수수학 • 동전 조합의 개수 세기

> **STEP I 1997, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q1

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.5 절 **거스름돈 만들기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/making-change.html

핵심 아이디어

"방법의 수"를 세는 일은 모든 조합을 정확히 한 번씩 나열하는 체계가 있을 때에만 제대로 된다. 자연스러운 체계는 가장 큰 동전의 개수를 먼저 정하고, 그다음 큰 동전의 개수를 정하는 식으로 나아가는 것이다. 2p와 1p 동전만 남으면 개수는 바로 나온다. 2p 동전의 개수가 모든 것을 결정하기 때문이다. 이렇게 하면 10p에 대한 답이 곧바로 20p에 대한 답에 쓰인다는 장점도 있다.

풀이

순서는 상관없다. 하나의 "방법"은 각 동전을 몇 개씩 쓸지를 정하는 것이다. 따라서 음이 아닌 정수해(non-negative integer solution)의 개수를 센다.

기본 단위: 2p와 1p 동전

2p와 1p 동전으로 r펜스를 만들려면 2p 동전의 개수 b를 정하면 되는데, 이는 0부터 $\lfloor r/2 \rfloor$까지 어느 값이든 될 수 있다. 그러면 나머지 $r - 2b \geq 0$펜스는 1p 동전으로 정확히 한 가지 방법으로 채워진다. 따라서 방법의 수는

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1.$$

이다.

10펜스 만들기

- *10p* 동전을 쓰는 경우. 이 동전 하나로 전체 금액이 만들어진다. 1가지 방법이다.
- *10p* 동전을 쓰지 않는 경우. 5p 동전의 개수 0, 1, 2에 따라 나눈다.

5p 동전	2p와 1p로 채울 금액	방법의 수 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$
2	0	1
1	5	3
0	10	6

따라서 $1 + 3 + 6 = 10$가지 방법이다.

모든 조합은 10p 동전과 5p 동전의 개수가 확정되어 있으므로, 각 조합은 꼭 한 번만 세어진다. 전체는 요구된 대로 $1 + 10 = 11$가지이다.

20펜스 만들기

5p, 2p, 1p 동전으로 n펜스를 만드는 방법의 수를 $F(n)$이라 하자. 방금 $F(10) = 10$임을 보았고, 분명히 $F(0) = 1$이다(동전을 하나도 쓰지 않는다). $F(20)$은 5p 동전의 개수 0부터 4까지에 따라 나눈다.

5p 동전	2p와 1p로 채울 금액	방법의 수
4	0	1
3	5	3
2	10	6
1	15	8
0	20	11

따라서 $F(20) = 1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29$이다.

> **생각해 보기** 20p와 10p 동전은 중복해서 세지 않으면서 어떻게 끼워 넣을 수 있을까?

다시 큰 동전으로 나눈다. 20p 동전을 쓰는 경우에는 그 동전이 유일한 동전이어야 하므로 1가지 방법이다. 쓰지 않는 경우에는 10p 동전의 개수에 따라 나눈다.

- 10p 동전 두 개: 남는 금액이 없으므로 $F(0) = 1$가지;
- 10p 동전 한 개: 10p가 남으므로 $F(10) = 10$가지;
- 10p 동전 없음: 20p가 남으므로 $F(20) = 29$가지.

이 경우들은 서로 겹치지 않고 모든 경우를 빠짐없이 덮으므로, 20펜스를 만드는 방법의 수는

$$1 + 1 + 10 + 29 = 41.$$

이다.

검산

- 10p의 경우를 손으로 나열해 보자. 10; 5+5; 5+2+2+1, 5+2+1+1+1, 5+1 × 5; 그리고 2 × 5, 2 × 4+1 × 2, ..., 1 × 10 (이런 것이 여섯 가지). 모두 11가지이다.
- 각 동전의 개수에 대해 반복문을 도는 짧은 컴퓨터 프로그램으로 세어 보면 11과 41이 나온다. 중간값 $F(10) = 10$과 $F(20) = 29$, 그리고 20p 동전을 쓰지 않으면 40가지라는 것도 확인된다.
- 작은 경우는 손으로 쉽게 확인할 수 있다. 5p, 2p, 1p 동전으로 5p를 만드는 방법은 $F(5) = 4$가지이고, 이는 $1 + 3$과 일치한다.

흔한 실수

- 순서까지 세어서 5+2+2+1과 2+5+1+2를 서로 다른 "방법"으로 보는 것. 이 둘은 같은 동전 모음이다.
- 동전 하나만 쓰는 방법, 즉 10p 동전 하나와 20p 동전 하나를 빠뜨리는 것.
- 눈에 보이는 체계 없이 합계만 제시하는 것. 문제에서 설명 없는 답에는 점수를 주지 않는다고 경고하므로, 경우를 나누는 과정 자체가 핵심이다.

STEP 너머

이것은 n을 정해진 집합의 수들로 나누는 **분할**(partition)이다. 이를 다루는 깔끔한 방법은 생성함수(generating function)이다. 방법의 수는

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})},$$

에서 x^n의 계수(coefficient)이며, 우리가 한 경우 나누기는 이 인수들을 하나씩 전개하여 곱하는 것에 지나지 않는다. 생성함수는 세기 문제를 대수 문제로 바꾸어 주며, 분할에 관한 오일러(Euler)와 라마누잔(Ramanujan)의 연구로 이어진다. 이를 탐구하기 좋은 책은 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*이고, 정수론 쪽으로는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.