풀이

STEP III 1996, 문제 9

역학 • 원운동

> **STEP III 1996, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q9

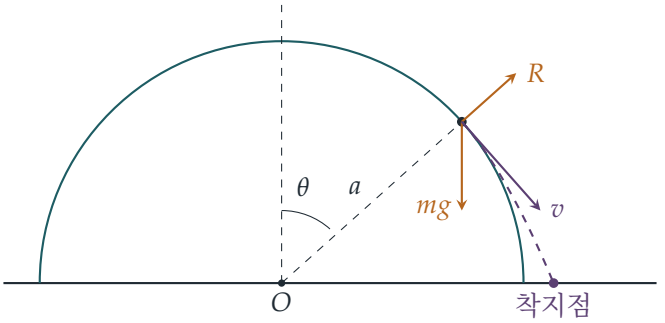
핵심 아이디어

운동은 두 단계로 이루어진다. 입자가 구 위에 머무는 동안에는 원운동을 하므로, 에너지 보존(energy conservation)으로 속력을 구하고 반지름 방향의 운동 방정식(equation of motion)으로 수직항력(normal reaction)을 구한다. 입자는 이 항력이 0으로 떨어지는 순간 구를 떠난다. 그 뒤로는 알려진 점에서 알려진 속력으로 접선(tangent) 방향으로 발사된 평범한 포물체(projectile)이므로, 이것이 중심의 높이를 지나는 위치만 찾으면 된다.

풀이

모형

입자를 중심이 O인 매끄러운 고정된 구 위에 놓인 질량 m의 질점(point mass)으로 보고, 공기 저항(air resistance)은 없다고 하자. 작용하는 힘은 무게 mg와 수직항력 R뿐이며, 수직항력은 반지름을 따라 O에서 멀어지는 방향으로 작용한다. 입자를 P라 할 때 OP와 연직 위쪽 방향이 이루는 각을 θ, 입자의 속력을 v라 하자. 처음 변위가 작으므로 초기 속력은 (극한으로서) 0으로 둔다.



1단계: 구 위에서

항력은 운동 방향에 수직이므로 일(work)을 하지 않고, 따라서 에너지가 보존된다. 입자는 꼭대기에서 $a - a\cos\theta$만큼 내려왔으므로

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga(1-\cos\theta), \qquad \text{즉} \qquad v^2 = 2ga(1-\cos\theta).$$

구 위에 머무는 동안 입자는 반지름 a인 원을 따라 움직이므로, O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{a} \quad\Longrightarrow\quad R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2).$$

생각해 보기 입자는 왜 정확히 $R = 0$일 때 구를 떠나는가?

구는 밀어낼 수만 있으므로 접촉하는 동안에는 $R \geq 0$이다. θ가 0에서부터 커지면 R는 mg에서부터 꾸준히 줄어들고, 위의 식은 $\cos\theta = \frac{2}{3}$을 넘어서면 $R < 0$을 준다. 이는 구가 입자를 안쪽으로 끌어당겨야 한다는 뜻인데, 구는 그렇게 할 수 없다. 따라서 접촉은 다음일 때 끊어진다.

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad \sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}, \qquad v^2 = 2ga(1-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}ga.$$

2단계: 포물체 운동

원점을 O로 하고, x축은 (운동 방향의) 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡자. 구를 떠나는 순간 입자의 위치는

$$x_0 = a\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}a, \qquad y_0 = a\cos\theta = \tfrac{2}{3}a,$$

이고, 속도는 접선 방향으로 수평선 아래 θ의 각을 이룬다.

$$u_x = v\cos\theta = \tfrac{2}{3}v, \qquad u_y = -v\sin\theta = -\tfrac{\sqrt{5}}{3}v, \qquad \text{여기서} v = \sqrt{\tfrac{2}{3}ga}.$$

이제 $y = y_0 + u_y t - \frac{1}{2}gt^2$이므로, 입자가 $y = 0$에 도달하는 것은

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{3}v\,t - \tfrac{2}{3}a = 0.$$

일 때이다. 양의 근(root)을 택하면

$$t = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}v + \sqrt{\frac{5}{9}v^2 + \frac{4}{3}ga}}{g}.$$

$v^2 = \frac{2}{3}ga$이므로 근호 안의 식은 $\frac{10}{27}ga + \frac{36}{27}ga = \frac{46}{27}ga$이고, $\frac{\sqrt{5}}{3}v = \sqrt{\frac{10}{27}ga}$이다. 따라서

$$t = \sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46} - \sqrt{10}).$$

비행하는 동안 이동한 수평 거리는

$$\begin{aligned} u_x t &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}ga} \cdot \sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46} - \sqrt{10}) = \frac{2\sqrt{2}\,a}{27}(\sqrt{46} - \sqrt{10}) \\ &= \frac{2a}{27}(\sqrt{92} - \sqrt{20}) = \frac{2a}{27}(2\sqrt{23} - 2\sqrt{5}) = \frac{a}{27}(4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}). \end{aligned}$$

여기에 출발 지점까지의 거리 $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{9\sqrt{5}}{27}a$를 더하면, 입자는 중심에서

$$x_0 + u_x t = \frac{a}{27}(9\sqrt{5} + 4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}) = \frac{a(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23})}{27}$$

만큼 떨어진 곳에서 O를 지나는 수평면과 만난다. 이것이 구하려던 결과이다.

비행 경로는 구에 닿지 않는다

빈틈없이 하려면 포물체가 정말로 구에 닿지 않는지 확인해야 한다. 비행 경로를 따라 $f(t) = x^2 + y^2 - a^2$이라 하자. t의 거듭제곱으로 전개하면 다음과 같다.

- 상수항은 $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$이다.
- t의 계수는 $2(x_0 u_x + y_0 u_y) = 0$이다. 속도가 반지름에 수직이기 때문이다.
- t^2의 계수는 $u_x^2 + u_y^2 - g y_0 = v^2 - ga\cos\theta = 0$이며, 이는 정확히 $R = 0$이라는 조건이다.
- 남는 것은 $-g u_y\, t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4$이고, $u_y < 0$이다.

따라서 $t > 0$에서 $f(t) = g|u_y|\, t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4 > 0$이다. 입자는 구 바깥에 머물며, 위에서 구한 착지 거리가 실제로 입자가 도달하는 거리이다.

검산

- 답은 약 $1.125a$이다. 이는 당연히 a보다 커야 한다. 구는 O의 높이에서 거리 a까지 뻗어 있으므로 입자가 구를 비켜 지나가야 하기 때문이다.

- 중심 위로 $\frac{2}{3}a$의 높이에서 구를 떠난다는 것은 잘 알려진 결과이며, g나 m에 의존하지 않는다. 착지 거리도 이들에 의존하지 않는데, 이는 차원 분석(dimensional analysis)이 요구하는 바이다. 문제에 등장하는 길이는 a뿐이다.
- 운동을 수치적으로도 따라가 보았다. 아주 작은 변위에서 출발하여 $\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta$를 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 적분하고, $R = 0$에서 멈춘 뒤 포물체로 이어서 계산하면 $1.12458a$에 착지한다. 정확한 공식은 $1.124580\ldots a$를 준다.

흔한 실수

- ($R = 0$에서 얻은) $v^2 = ga\cos\theta$를 쓰고는 에너지 식과 결합하는 것을 잊거나, 잘못된 속력을 쓰는 것. 구를 떠날 때 $v^2 = \frac{2}{3}ga$이지 $\frac{1}{3}ga$가 아니다.
- 포물체를 수평으로 발사하는 것. 속도는 접선 방향으로 수평선 **아래로** θ의 각을 이루므로, 처음부터 아래쪽 성분을 가진다.
- 착지 거리를 중심이 아니라 구를 떠난 지점에서부터 재어 x_0를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

"접촉은 항력이 0이 될 때 끝난다"라는 조건은 **일방 구속**(*unilateral constraint*)의 한 예이다. 이런 구속은 철사에 꿰인 구슬에서부터 볼록한 다리를 넘어가는 자동차에 이르기까지 역학 곳곳에 나타난다. 풀이의 마지막 단계에서 일어난 우연, 즉 포물체의 경로와 구가 떠나는 지점에서 2차까지 일치한다는 사실은 그 순간 포물선과 원의 곡률(curvature)이 같다는 것을 뜻한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원운동, 구속력, 에너지 방법을 이러한 관점에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.