풀이

STEP III 1996, 문제 8

순수수학 • 뫼비우스 변환

> **STEP III 1996, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q8

핵심 아이디어

이 변환들은 뫼비우스(Möbius) 변환, 곧 일차분수 변환(fractional linear transformation)이며, 거의 모든 내용이 두 가지 관찰에서 나온다. 첫째, $y = T(x)$에서 분모를 없애면 x에 대해 일차이고 **동시에** y에 대해서도 일차인 방정식을 얻으므로, 어느 쪽에 대해서든 풀 수 있다. 둘째, $T(x)$를 상수와 $1/(cx-d)$의 상수배의 합으로 쓰면, T가 결코 가지지 않는 값이 무엇인지 곧바로 보인다. 합성(composition)은 그냥 대입하고 분모를 곱해 정리하면 된다. 그 결과는 각 T를 행렬 $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$에 대응시키면 가장 쉽게 정리된다.

풀이

고정점

$x \neq d/c$일 때, $T(x) = x$는 $ax - b = x(cx - d)$를 뜻한다. 즉

$$cx^2 - (a+d)x + b = 0. \qquad (*)$$

먼저 ($c \neq 0$일 때) $(*)$이 금지된 값 $x = d/c$를 해로 낼 수 없음을 확인한다. 대입하면 $d^2/c - (a+d)d/c + b = (bc - ad)/c \neq 0$이므로, $(*)$의 모든 근은 실제 고정점(fixed point)이다.

$c \neq 0$인 경우, $(*)$은 이차방정식이고 고정점은

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4bc}}{2c}.$$

이다. $(a+d)^2 > 4bc$이면 고정점이 두 개, $(a+d)^2 = 4bc$이면 한 개, $(a+d)^2 < 4bc$이면 하나도 없다.

$c = 0$인 경우, 조건 $ad \neq bc$는 $ad \neq 0$이 되므로 $d \neq 0$이고, $T(x) = (b - ax)/d$는 모든 곳에서 정의된다. 이제 $(*)$은 $(a + d)x = b$가 된다. $a + d \neq 0$이면 고정점은 정확히 하나, $x = b/(a + d)$이다. $a + d = 0$이고 $b \neq 0$이면 고정점이 없다. $a + d = 0$이고 $b = 0$이면 $T(x) = -ax/d = x$이므로 T는 항등함수(identity)이고 모든 x가 고정점이다.

역함수

$y(cx - d) = ax - b$에서 $cxy - dy = ax - b$이므로 $x(cy - a) = dy - b$이고, 따라서

$$x = T^{-1}(y) = \frac{dy - b}{cy - a}.$$

이다. 이 역함수(inverse)는 T와 같은 꼴이며,

$$a' = d, \qquad b' = b, \qquad c' = c, \qquad d' = a,$$

이고, $a'd' - b'c' = da - bc \neq 0$이므로 조건도 여전히 성립한다. ($cy - a$로 나누는 것은 정당하다. $y = a/c$는 결코 T의 값이 되지 않기 때문이다. 다음 부분을 보라.)

집합 S_r

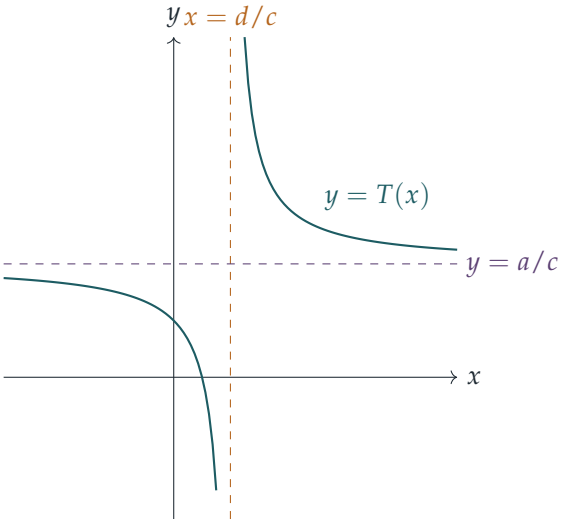
$c \neq 0$이라 하자. $T(x)$는 정확히 $cx \neq d$일 때 정의되므로 $r = d/c$로 잡는다. 그러면 T는 모든 $x \in S_{d/c}$에서 정의된다. 상(image)을 구하기 위해 상수 부분을 떼어 낸다.

$$ax - b = \frac{a}{c}(cx - d) + \frac{ad - bc}{c}, \qquad \text{따라서} \qquad T(x) = \frac{a}{c} + \frac{ad - bc}{c\,(cx - d)}.$$

$ad - bc \neq 0$이므로 둘째 항은 결코 0이 아니고, 따라서 $T(x) \neq a/c$이다. 역으로, $y \neq a/c$인 모든 값이 실제로 얻어진다. 역함수 공식에서 $x = (dy - b)/(cy - a)$이고, 이 x는 d/c가 아니다. d/c는 T^{-1}의 값이 아니기 때문이다(T^{-1}에 같은 논증을 적용하면 된다. T^{-1}의 "a'/c'"는 d/c이다). 그러므로

$$T(S_{d/c}) = S_{a/c},$$

이고, T는 $S_{d/c}$에서 $S_{a/c}$로의 전단사(bijection)이다. 그래프는 점근선(asymptote)이 $x = d/c$와 $y = a/c$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이다.



(그림은 $T(x) = (2x-1)/(x-1) = 2 + 1/(x-1)$을 사용했다.)

$c = 0$**인 경우**, $ad \neq 0$이므로 $d \neq 0$이고 $a \neq 0$이며, $T(x) = (b - ax)/d$는 상수가 아닌 일차함수이다. 따라서 T는 **모든** 실수 x에서 정의되고 제외할 값이 없으며, $\mathbb{R}$을 $\mathbb{R}$ 위로 전단사로 보낸다. 그래도 점 r 하나를 뺀다면 $T(S_r) = S_{T(r)} = S_{(b-ar)/d}$이다.

합성

$T_1(x) = \dfrac{a_1x - b_1}{c_1x - d_1}$을 T_2에 대입하고, 분자와 분모에 $c_1x - d_1$을 곱한다.

$$\begin{aligned} T_2(T_1(x)) &= \frac{a_2(a_1x - b_1) - b_2(c_1x - d_1)}{c_2(a_1x - b_1) - d_2(c_1x - d_1)} \\ &= \frac{(a_1a_2 - b_2c_1)\,x - (a_2b_1 - b_2d_1)}{(a_1c_2 - c_1d_2)\,x - (b_1c_2 - d_1d_2)}. \end{aligned}$$

따라서 T_3도 같은 꼴이며,

$$a_3 = a_1a_2 - b_2c_1, \quad b_3 = a_2b_1 - b_2d_1, \quad c_3 = a_1c_2 - c_1d_2, \quad d_3 = b_1c_2 - d_1d_2.$$

이다.

? **생각해 보기** "같은 꼴"이라는 것이 정말 증명되었는가? $a_3d_3 \neq b_3c_3$도 필요하다.

그렇다, 이것도 필요하다. 이 계수들은 정확히 행렬(matrix)의 곱

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ c_1 & -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ c_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

의 성분이고, 각 행렬의 행렬식(determinant)은 $bc - ad$이다. 곱의 행렬식은 행렬식의 곱이므로

$$b_3c_3 - a_3d_3 = (b_1c_1 - a_1d_1)(b_2c_2 - a_2d_2) \neq 0.$$

이다. (직접 전개해도 되는데, 몇 줄의 대수 계산이면 된다.) 따라서 T_3은 같은 유형의 변환이다.

T^2이 항등함수가 되는 때는 언제인가?

합성 공식에서 $T_1 = T_2 = T$로 놓는다. 그러면 $T^2(x) = \dfrac{Ax - B}{Cx - D}$이고,

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b(a - d), \qquad C = c(a - d), \qquad D = bc - d^2.$$

이다. T^2이 항등함수라는 것은 정의역(domain)의 모든 x에 대해 $Ax - B = x(Cx - D)$라는 뜻이며, 정의역은 많아야 몇 개의 점을 뺀 전체이다. 무한히 많은 점에서 성립하는 다항식 등식은 항등적으로 성립하므로 계수를 비교한다.

$$C = 0, \qquad A + D = 0, \qquad B = 0,$$

즉

$$c(a - d) = 0, \qquad (a - d)(a + d) = 0, \qquad b(a - d) = 0.$$

- $a = d$이면 세 조건이 모두 성립한다. 실제로 $T^2(x) = \dfrac{(a^2 - bc)x}{-(bc - a^2)} = x$이며, 여기서 $a^2 - bc = ad - bc \neq 0$이다.
- $a \neq d$이면 $b = c = 0$이고 $a = -d$여야 한다. 그러면 $T(x) = ax/(-d) = x$이므로 T 자체가 항등함수이다.

따라서 T^2이 항등함수일 **필요충분조건은 $a = d$이거나, $b = c = 0$이고 $a + d = 0$인 것**이다(후자는 T가 항등함수인 경우이다). 둘째 경우는 자명하므로, 흥미로운 대합(involution)은 정확히 $a^2 \neq bc$인 사상 $x \mapsto \dfrac{ax - b}{cx - a}$들이다.

예

방금 구한 조건에 따라, $a = d$인 두 사상으로서 그 합성은 $a \neq d$인 것이 필요하다. 다음을 잡자.

$$T_1(x) = -x \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 0, 0, 1), \qquad T_2(x) = 1 - x \quad (a_2, b_2, c_2, d_2) = (1, 1, 0, 1).$$

둘 다 $a = d$이므로 T_1^2과 T_2^2은 항등함수이다. 이는 직접 확인할 수도 있다. $-(-x) = x$이고 $1 - (1 - x) = x$이다. 둘의 합성은

$$T_3(x) = T_2(T_1(x)) = 1 - (-x) = x + 1,$$

이고, 표준형에서 $(a_3, b_3, c_3, d_3) = (1, -1, 0, -1)$이므로 $a_3 \neq d_3$이다. 실제로 $T_3^2(x) = x + 2 \neq x$이다.

기하학적으로 보면, 직선의 두 반사(reflection)(0에 대한 반사와 $\frac{1}{2}$에 대한 반사)를 합성하면 평행이동(translation)이 되고, 평행이동은 자기 자신의 역이 아니다. $c \neq 0$인 예를 원한다면, 같은 T_2와 함께 $T_1(x) = -1/x$를 시도해 보라. 그러면 $T_3(x) = (x+1)/x$이고 $T_3^2(x) = (2x+1)/(x+1)$이다.

검산

- 그림의 예 $T(x) = (2x-1)/(x-1)(a = 2, b = 1, c = d = 1)$을 사용한다. 고정점은 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 근, 곧 $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$이며, $T(2.618\ldots) = 2.618\ldots$임을 확인할 수 있다. 역함수는 $(y-1)/(y-2)$이고, 예상대로 $y = 2 = a/c$에서 정의되지 않는다.
- 합성 공식에 $T_1 = T$, $T_2 = T^{-1}$, 즉 $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (d, b, c, a)$를 넣으면 $a_3 = ad - bc$, $b_3 = 0, c_3 = 0, d_3 = bc - ad$를 얻는다. 마땅히 그래야 하듯이 이것은 항등함수이다.
- 컴퓨터로 수천 개의 무작위 (a, b, c, d)에 대해 정확한 분수 계산을 써서 역함수, 상, 합성 공식을 검증했다. 또한 $ad \neq bc$인 모든 정수 $a, b, c, d \in [-3, 3]$에 대해 T^2이 항등함수가 될 조건을 직접 계산한 결과와 대조했다.

흔한 실수

- 자명한 경우를 빠뜨리는 것: 항등함수($b = c = 0, a = -d$)도 제곱하면 항등함수가 되므로, $a = d$는 **필요조건**이 아니다.
- 합성이 일차함수의 비라는 것만 보이고 $a_3 d_3 \neq b_3 c_3$을 확인하지 않는 것.
- $c = 0$인 경우에 제외되는 점을 찾으려 하는 것. 상수가 아닌 일차사상은 모든 곳에서 정의되고 모든 실수를 값으로 가진다.

STEP 너머

$T(d/c) = \infty$, $T(\infty) = a/c$로 두어 $x = \infty$를 허용하면, 이러한 모든 T는 확장된 실직선(extended line)의 전단사가 된다. 계수를 복소수로 하면 리만(Riemann) 구(Riemann sphere)의 뫼비우스 변환을 얻는다. 위에서 사용한 행렬 대응은 이 사상들이 군(group)을 이루며, 이 군이 스칼라배를 동일시한 가역 2×2 행렬들의 군, 곧 사영선형군(projective linear group)과 동형(isomorphic)임을 말해 준다. 합성은 행렬의 곱셈이 되고, 항등함수가 아닌 사상이 대합일 필요충분조건은 그 행렬의 대각합(trace)이 0인 것이다. 여기서는 그것이 $a - d = 0$이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*에는 뫼비우스 변환을 다룬 아

름다운 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.