풀이

STEP III 1996, 문제 7

순수수학 • 근의 대칭함수

> **STEP III 1996, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q7

핵심 아이디어

두 소문항은 같은 사실에 기대고 있다. 세 수에 대한 대칭식(symmetric expression)은 모두 세 수의 합, 두 수씩 곱한 것의 합, 세 수의 곱으로 나타낼 수 있으며, 이 세 양은 바로 그 세 수를 근(root)으로 하는 삼차식(cubic)의 계수이다. (i)에서는 이 사실 덕분에 비선형 연립방정식이 삼차방정식 하나로 바뀐다. (ii)에서는 근을 구할 필요조차 없다. 헤론의 공식(Heron's formula)은 a, b, c에 대해 대칭이므로 삼차식의 계수만으로 충분하다.

풀이

소문항 (i)

먼저 제곱의 합을 구한다.

$$\alpha^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \qquad \text{따라서} \qquad x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 - 2\beta.$$

다음으로 인수분해(factorisation)

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

를 이용한다. 이 식은 우변을 전개하여 확인할 수 있다. $x\cdot xy$와 $y\cdot(-xy)$ 같은 아홉 개의 교차항은 둘씩 짝지어 소거되고, $-xyz$ 꼴의 세 항이 남는다. 대입하면

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 3\gamma + \alpha(\alpha^2 - 2\beta - \beta) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma. \end{aligned}$$

이다. 따라서 $A=1, B=-3, C=3\gamma$이다. (여기서 C는 곱의 세 배이므로 γ에 따라 달라지고, A와 B는 그냥 수이다.)

이제 주어진 방정식을 풀자. $\alpha = 1$이고, 제곱의 합으로부터

$$3 = \alpha^2 - 2\beta = 1 - 2\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = -1.$$

를 얻는다. 그러면 세제곱의 합으로부터

$$4 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma = 1 + 3 + 3\gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0.$$

를 얻는다.

생각해 보기 α, β, γ를 알았다. 어떻게 하면 x, y, z로 되돌아갈 수 있을까?

수 x, y, z의 합이 α, 두 수씩 곱한 것의 합이 β, 곱이 γ일 필요충분조건은 이 세 수가

$$(t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma = 0.$$

의 세 근이라는 것이다. 양쪽 방향이 모두 성립한다. x, y, z가 연립방정식의 해이면 이들은 이 삼차방정식의 근이고, 거꾸로 삼차방정식의 근들은 어떤 순서로 놓든 올바른 α, β, γ를 가지므로 (위의 항등식에 의해) 세 방정식을 모두 만족한다. 여기서 삼차방정식은

$$t^3 - t^2 - t = t\,(t^2 - t - 1) = 0, \qquad \text{따라서} \qquad t = 0, \quad t = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \quad t = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

이다. 그러므로 해는

$$\{x, y, z\} = \left\{ 0,\ \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \right\},$$

이며 순서는 상관없다. 세 값이 서로 다르므로 순서쌍 (x, y, z)는 모두 여섯 개이다.

소문항 (ii)

a, b, c가 삼차방정식의 근이므로 모든 x에 대해

$$x^3 - 16x^2 + 81x - 128 = (x-a)(x-b)(x-c)$$

이다. x^2의 계수를 비교하면 $a + b + c = 16$이므로 $s = 8$이다. 이제 요령은 이 항등식에 $x = s = 8$을 대입하는 것이다. 우변은 $(s-a)(s-b)(s-c)$가 되는데, 이것이 바로 헤론의 공식에 나오는 곱이다.

$$(s-a)(s-b)(s-c) = 8^3 - 16 \cdot 8^2 + 81 \cdot 8 - 128 = 512 - 1024 + 648 - 128 = 8.$$

따라서

$$\text{넓이} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8.$$

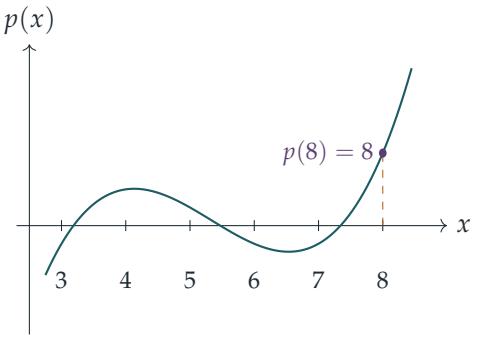
이다.

? 생각해 보기 이런 변의 길이를 갖는 삼각형이 정말 존재할까?

확인해야 한다. 헤론의 공식은 a, b, c가 양수이고 각각이 나머지 둘의 합보다 작을 때에만 삼각형을 나타내기 때문이다. $a < b + c \iff 2a < a + b + c \iff a < s$이므로, 세 근이 모두 실수이고 양수이며 8보다 작아야 한다. $p(x) = x^3 - 16x^2 + 81x - 128$이라 하자. 그러면

$$p(3) = -2, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 2, \quad p(6) = -2, \quad p(7) = -2, \quad p(8) = 8,$$

이므로 부호의 변화에 의해 $(3,4)$, $(5,6)$, $(7,8)$ 각각에 근이 하나씩 있다. 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이므로 이것이 근의 전부이고, 모든 근은 0과 8 사이에 엄격하게 놓인다. 삼각형이 존재하며, 그 넓이는 8이다.



검산

- (i)에서 $x = 1, y = 2, z = 3$을 넣어 보자. $\alpha = 6, \beta = 11, \gamma = 6$이고 $216 - 198 + 18 = 36 = 1 + 8 + 27$이다.
- $x = 0, y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618, z = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \approx -0.618$일 때 합은 1이고, $y^2 = y + 1$, $z^2 = z + 1$이므로 제곱의 합은 $(y + z) + 2 = 3$, 세제곱의 합은 $y^2 + z^2 + (y + z) = 3 + 1 = 4$이다.
- (ii)의 근을 수치로 구하면 $a \approx 3.186$, $b \approx 5.471$, $c \approx 7.343$이다. 이 값으로 헤론의 공식을 계산하면 8.000이 나오고, 코사인 법칙(cosine rule)으로 C를 구해 $\frac{1}{2}ab\sin C$를 계산해도 같은 값이 나온다.

흔한 실수

- 여섯 가지 순서를 모두 제시하지 않고 순서쌍 하나만 답하거나, $t = 0$이 $t^3 - t^2 - t = 0$의 근이라는 것을 빠뜨린다.

- 근과 계수의 관계(비에트 공식, Vieta's formulas)에서 부호를 틀린다. $t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$에서는 부호가 번갈아 나타난다.
- 근들이 실제로 삼각형을 이루는지 확인하지 않고 넓이를 구한다.

STEP 너머

대칭다항식의 기본정리(fundamental theorem of symmetric polynomials)에 따르면, x, y, z를 서로 바꾸어도 변하지 않는 x, y, z의 다항식은 모두 기본대칭함수(elementary symmetric functions) α, β, γ의 다항식이다. 뉴턴(Newton) 항등식은 거듭제곱의 합 $x^k + y^k + z^k$를 점화식으로 구해 준다. 이러한 아이디어는 갈루아(Galois) 이론으로 이어지는데, 이 이론은 삼차방정식과 사차방정식에는 근의 공식이 있지만 일반적인 오차방정식에는 없는 이유를 설명해 준다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 그 방향으로 내딛는 첫걸음으로 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.