풀이

STEP III 1996, 문제 6

순수수학 • 행렬의 군

STEP III 1996, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.8 절 **특이행렬로 이루어진 군**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/singular-group.html

핵심 아이디어

S의 모든 행렬은 하나의 고정된 행렬 $\mathbf{J}$의 상수배이고, $\mathbf{J}^2$ 역시 $\mathbf{J}$의 상수배이다. 따라서 S의 원소끼리 곱하는 일은 결국 실수끼리 곱하는 일이 된다. 놀라운 점은 이 군(group)의 항등원(identity)이 단위행렬(identity matrix) $\mathbf{I}$가 **아니라는** 것이다. 이 군에는 $\mathbf{I}$가 전혀 필요하지 않다. 소문항 (ii)는 왜 그럴 수밖에 없는지 설명한다. 군 안에서는 모든 원소를 다른 어떤 원소가 들어간 곱으로 나타낼 수 있고, 행렬식(determinant)은 곱하면 곱해지기 때문이다.

풀이

소문항 (i)

다음과 같이 두자.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}.$$

S의 모든 원소는 $a \neq 0$인 $a\mathbf{J}$ 꼴이며, 이를 $\mathbf{M}_a = a\mathbf{J}$로 쓴다.

닫힘성(closure). 0이 아닌 a와 b에 대하여

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = ab\,\mathbf{J}^2 = 2ab\,\mathbf{J} = \mathbf{M}_{2ab}.$$

$a \neq 0$이고 $b \neq 0$이므로 $2ab \neq 0$이고, 따라서 이 곱은 S에 속한다. 그러므로 S는 행렬 곱셈에 대하여 닫혀 있다.

이제 나머지 군의 공리(group axioms)를 확인한다.

결합법칙(associativity). 행렬 곱셈은 모든 2×2 행렬에 대하여 결합법칙을 만족하므로, 특히 S의 행렬에 대해서도 만족한다.

항등원. 모든 b에 대하여 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b$, 즉 $2eb = b$를 만족하는 $\mathbf{M}_e$를 찾고자 한다. 따라서 $e = \frac{1}{2}$로 잡는다.

$$\mathbf{M}_{1/2}\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2\cdot\frac{1}{2}b} = \mathbf{M}_b,$$

마찬가지로 $\mathbf{M}_b\mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{M}_b$이다. 따라서 S에 속하는 $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{J}$는 항등원이다.

> **생각해 보기** 단위행렬 $\mathbf{I}$는 S에 속하지 않는다. 행렬로 이루어진 군이라면 단위행렬이 있어야 하지 않을까?

그렇지 않다. 군에 필요한 것은 그 집합의 다른 원소들에 대하여 항등원 역할을 하는 *어떤* 원소이며, $\frac{1}{2}\mathbf{J}$는 S의 모든 원소에 대하여 그 역할을 한다. 이것이 모든 2×2 행렬에 대한 항등원은 아니지만(예를 들어 $\frac{1}{2}\mathbf{JI} \neq \mathbf{I}$), $\mathbf{I}$는 S에 속하지 않으므로 문제가 되지 않는다.

역원(inverse). $\mathbf{M}_a$가 주어졌을 때 $2ac = \frac{1}{2}$를 만족하는 $\mathbf{M}_c$를 찾고자 한다. 그러면 $c = \dfrac{1}{4a}$이고, $a \neq 0$이므로 이 값은 존재하며 0이 아니다. 이때

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/(4a)} = \mathbf{M}_{1/(4a)}\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_{2a/(4a)} = \mathbf{M}_{1/2} = \mathbf{E}.$$

네 공리가 모두 성립하므로 S는 행렬 곱셈에 대하여 군이다. (게다가 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_{2ab} = \mathbf{M}_b\mathbf{M}_a$이므로 아벨 군(abelian group)이기도 하다.) S의 모든 원소의 행렬식은 $a^2 - a^2 = 0$임에 주목하자. 이 행렬들은 보통의 의미에서는 역행렬이 없지만, 각각 군 안에서는 역원을 가진다.

소문항 (ii)

$\mathbf{A} \in G$가 $\det\mathbf{A} = 0$을 만족한다고 하고, $\mathbf{B}$를 G의 임의의 원소라 하자. G는 군이므로 $\mathbf{A}$는 G 안에서 $\mathbf{AA}' = \mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{E}$를 만족하는 역원 $\mathbf{A}'$을 가진다. ($\mathbf{A}^{-1}$이 아니라 $\mathbf{A}'$으로 쓴다. 이것은 G 안에서의 역원이지, 존재하지 않는 역행렬이 아니기 때문이다.)

$\mathbf{C} = \mathbf{A}'\mathbf{B}$라 하자. 닫힘성에 의해 $\mathbf{C} \in G$이고,

$$\mathbf{AC} = \mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = (\mathbf{AA}')\mathbf{B} = \mathbf{EB} = \mathbf{B}$$

이다. 여기서 결합법칙과 $\mathbf{E}$가 G의 항등원이라는 사실을 이용하였다. 따라서 방정식 $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$는 G 안에 해 $\mathbf{C}$를 가진다. 양변의 행렬식을 취하고 $\det(\mathbf{XY}) = \det\mathbf{X}\det\mathbf{Y}$를 이용하면

$$\det\mathbf{B} = \det\mathbf{A}\ \det\mathbf{C} = 0 \cdot \det\mathbf{C} = 0.$$

$\mathbf{B}$는 임의의 원소였으므로 G의 모든 원소는 특이 행렬(singular matrix)이다. 특히 이러한 군의 항등원 $\mathbf{E}$도 특이 행렬이므로, 소문항 (i)에서 본 것처럼 $\mathbf{I}$일 수 없다.

생각해 보기 G가 단지 곱셈에 대하여 닫힌 집합이 아니라 군이라는 사실은 어디에 쓰였는가?

역원 $\mathbf{A}'$과 항등원 $\mathbf{E}$를 이용하여 $\mathbf{B}$를 $\mathbf{A}$와 G의 어떤 원소의 곱으로 나타내었다. 이것들이 없으면 결과가 성립하지 않는다. 예를 들어 $\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$은 곱셈에 대하여 닫혀 있고 특이 행렬을 포함하지만, $\mathbf{I}$는 특이 행렬이 아니다. (이 집합은 군이 아니다. $\mathbf{0}$은 역원을 가지지 않는다.)

$n = 3$인 예. 소문항 (i)을 그대로 따라 한다. 다음과 같이 두자.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{\, a\mathbf{K} : a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,\}.$$

$\mathbf{K}^2$의 각 성분은 $1+1+1 = 3$이므로 $\mathbf{K}^2 = 3\mathbf{K}$이고

$$(a\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = 3ab\,\mathbf{K}.$$

- **닫힘성**: $a, b \neq 0$이면 $3ab \neq 0$이므로 이 곱은 G에 속한다.
- **결합법칙**: 행렬 곱셈으로부터 그대로 물려받는다.
- **항등원**: $(\frac{1}{3}\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = (b\mathbf{K})(\frac{1}{3}\mathbf{K}) = 3 \cdot \frac{1}{3}b\,\mathbf{K} = b\mathbf{K}$이므로 $\mathbf{E} = \frac{1}{3}\mathbf{K}$이다.
- **역원**: $3 \cdot a \cdot \dfrac{1}{9a} = \frac{1}{3}$이므로 $a\mathbf{K}$의 역원은 $\dfrac{1}{9a}\mathbf{K}$이다.

따라서 G는 행렬 곱셈에 대하여 군이다. 모든 $a\mathbf{K}$는 세 행이 같으므로 $\det(a\mathbf{K}) = 0$이다. 즉 이것은 3×3 특이 행렬로 이루어진 군이다.

(똑같이 잘 되는 또 다른 예로 $a, b \neq 0$인 행렬 $\mathrm{diag}(a, b, 0)$ 전체의 집합이 있으며, 그 항등원은 $\mathrm{diag}(1, 1, 0)$이다.)

검산

- 한 경우를 시험해 보자. $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{1/12}$의 모든 성분은 $3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$이므로 이 곱은 $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1/2}$와 같고, 이는 역원 공식 $\frac{1}{4a}$가 예측하는 그대로이다.
- 0이 아닌 임의의 a, b, c 수백 개에 대하여 정확한 분수 계산으로, 2×2와 3×3 두 행렬족 모두에서 닫힘성, 항등원, 역원 공식이 성립하는지, 이 행렬들의 행렬식이 모두 0인지, 그리고 $\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$가 성립하는지 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathbf{I}$를 항등원으로 잡거나, $\mathbf{A}^{-1}$을 보통의 역행렬로 잡는 것. 둘 다 S에는 없다. 항등원과 역원은 그 군 자체의 곱셈 규칙으로부터 찾아야 한다.

- $2ab \neq 0$인지 확인하는 것을 잊는 것. 닫힘성이 성립하려면 곱이 올바른 꼴이어야 할 뿐만 아니라 매개변수가 0이 아니어야 한다.

STEP 너머

군은 그 원소들이 어디에 놓여 있는지가 아니라 그 연산에 의해 정의된다. 여기서는 군이 $n \times n$ 행렬들 안에 들어 있으면서도 그 행렬들의 항등원을 공유하지 않는다. 사실 $\mathbf{E}$는 항상 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$를 만족하므로 사영(projection)이며, 이 군은 $\mathbf{E}$의 상(image) 위에서 가역인 사상으로 작용한다. 사상 $a \mapsto \mathbf{M}_{a/2}$는 곱셈에 대한 0이 아닌 실수 전체로부터 S로의 동형사상(isomorphism)이며, 이는 직접 확인할 수 있다. 더 알고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를, 사영에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.