풀이

STEP III 1996, 문제 5

순수수학 • 배각 공식

STEP III 1996, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q5

핵심 아이디어

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7$을 이항정리(binomial theorem)로 전개하고 드무아브르(de Moivre)의 정리(de Moivre's theorem)와 비교하면 $\cos 7\theta$와 $\sin 7\theta$를 다항식(polynomial)으로 나타낼 수 있다. 여기서 전체를 $\cos^7\theta$로 나누면 모든 것이 $t = \tan\theta$의 거듭제곱으로 바뀐다. $\tan 7\theta$를 t에 대한 두 다항식의 비로 나타내고 나면, $\tan 7\theta$가 0이 되는 각에서는 분자가 0이 되고, $\tan 7\theta$가 정의되지 않는 각에서는 분모가 0이 된다. 두 다항식은 인수 t를 제외하면 모두 우함수(even)이므로 t^2에 대한 삼차식(cubic)이 되고, 나머지는 비에트(Vieta)의 공식(Vieta's formulae)이 해결해 준다.

풀이

$\tan 7\theta$에 대한 공식

$c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$라 하면, 드무아브르의 정리와 이항정리에 의해

$$\cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta = (c + \mathrm{i}s)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \mathrm{i}^k c^{7-k} s^k.$$

$\cos\theta \neq 0$이라 가정하여 $t = \tan\theta$가 정의되도록 한다. c^7을 묶어 내면 $(c + \mathrm{i}s)^7 = c^7(1 + \mathrm{i}t)^7$이다. $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$과 이항계수(binomial coefficient) $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$을 이용하면

$$(1 + \mathrm{i}t)^7 = (1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6) + \mathrm{i}\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

실수부와 허수부를 비교하면(i를 제외한 모든 것은 실수이다)

$$\cos 7\theta = \cos^7\theta\,(1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6),$$
$$\sin 7\theta = \cos^7\theta\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

두 식을 나누면 인수 $\cos^7\theta$가 약분되고, 분자와 분모에 -1을 곱하면

$$\tan 7\theta = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = \frac{t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)}{7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1},$$

이므로 요구된 식이 성립한다.

나중을 위해 위의 두 식이 말해 주는 바를 정리해 둔다. $N(t) = t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)$, $D(t) = 7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1$이라 하자. 그러면 $\sin 7\theta = -\cos^7\theta\, N(t)$이고 $\cos 7\theta = -\cos^7\theta\, D(t)$이므로, $\cos\theta \neq 0$일 때

$$\sin 7\theta = 0 \iff N(t) = 0, \qquad \cos 7\theta = 0 \iff D(t) = 0.$$

소문항 (i)

$k = 1, 2, 3$에 대하여 $\theta = \frac{k\pi}{7}$로 놓는다. 그러면 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$이고 $\cos\theta \neq 0$이므로 $N(\tan\theta) = 0$이다. 또 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta \neq 0$이고, 따라서 인수 t를 약분할 수 있다.

$$t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0.$$

그러므로 $x = \tan^2\frac{\pi}{7}$, $\tan^2\frac{2\pi}{7}$, $\tan^2\frac{3\pi}{7}$에 대하여 $x = t^2$은

$$x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$$

을 만족한다.

> ? **생각해 보기** 이 세 수가 하나의 근을 여러 번 센 것이 아니라 모든 근이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

각 $\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7}$은 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하고, 이 구간에서 tan는 양수이며 순증가한다. 따라서 $\tan^2$의 세 값은 서로 다르다. 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이므로 이 세 수가 정확히 그 근이고, 이것이 구하는 삼차방정식이다.

비에트의 공식에 의해 세 근의 곱은 7이다.

$$\tan^2\tfrac{\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{2\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{3\pi}{7} = 7.$$

각 각이 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 각 탄젠트 값은 양수이고, 따라서 양의 제곱근을 택한다.

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\,\tan\tfrac{2\pi}{7}\,\tan\tfrac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

소문항 (ii)

이번에는 $\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$로 놓는다. 그러면 $7\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$이므로 $\cos 7\theta = 0$이고, 한편 $\cos\theta \neq 0$이다. 앞의 관찰에 의해 $D(\tan\theta) = 0$이므로 $y = \tan^2\theta$는

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0.$$

을 만족한다. 소문항 (i)에서와 마찬가지로 세 각은 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하고 서로 다르므로, $\tan^2\theta$의 세 값은 서로 다르며 정확히 이 삼차방정식의 근이다. 비에트의 공식에 의해 그 합은 $\frac{35}{7}$이다.

$$\tan^2\tfrac{\pi}{14} + \tan^2\tfrac{3\pi}{14} + \tan^2\tfrac{5\pi}{14} = 5.$$

소문항 (i)을 이용하는 간단한 다른 방법도 있다. $\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}$이고, 마찬가지로 $\frac{3\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}$, $\frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$이므로, 구하는 합은 소문항 (i)의 삼차방정식의 근 x_i에 대한 $\sum 1/x_i$이다. 즉

$$\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{35}{7} = 5.$$

같은 이야기로, 소문항 (i)의 삼차방정식에 $x = 1/y$를 대입하고 분모를 없애면 소문항 (ii)의 삼차방정식이 나온다.

검산

- $t = 1$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{4}$를 대입한다. 공식은 $\frac{1-21+35-7}{7-35+21-1} = \frac{8}{-8} = -1$을 주고, 실제로 $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$이다.
- θ가 작을 때 $\tan 7\theta \approx 7t$이고, 공식은 일차 근사로 $\frac{-7t}{-1} = 7t$를 준다.
- 수치적으로 $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} \approx 0.4816 \times 1.2540 \times 4.3813 \approx 2.6458 \approx \sqrt{7}$이고, $\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} \approx 0.0521 + 0.6360 + 4.3119 = 5.0000$이다.

흔한 실수

- 세 값이 서로 다르다는 것, 그래서 이들이 정말로 삼차방정식의 **모든** 근이라는 것을 정당화하지 않는다.
- 소문항 (i)에서 $\pm\sqrt{7}$이라고 답한다. 세 탄젠트 값이 모두 양수이므로 부호는 정해져 있다.
- i의 거듭제곱에서 부호를 틀린다. $\mathrm{i}^6 = -1$이고 $\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$이다.

STEP 너머

수 $\tan^2 \frac{k\pi}{7}$들은 켤레 대수적 수(conjugate algebraic numbers)이다. 즉 이들은 정수 계수를 갖는 하나의 기약(irreducible) 삼차다항식의 근이며, 따라서 이들에 대한 대칭식(symmetric expression)은 모두 유리수이다. 이것이 다항식의 근들 사이의 대칭을 연구하는 갈루아(Galois) 이론(Galois theory)의 출발점이다. 같은 기법으로 $\sum_{k=1}^{n} \cot^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$과 같은 항등식도 얻을 수 있는데, 이 항등식은 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$의 한 초등적 증명에 쓰인다. 드무아브르의 정리와 단위근(roots of unity)을 기하학적으로 보고 싶다면 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 이런 종류의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.