풀이

STEP III 1996, 문제 4

순수수학 • 곱을 최대로 하는 분할

> **STEP III 1996, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q4

핵심 아이디어

N을 나누는 모든 방법을 하나하나 살펴보는 대신, **최적인**(*optimal*) 분할(splitting)이 무엇을 포함할 수 없는지를 묻는다. 너무 큰 부분은 곱(product)을 줄이지 않으면서 두 조각으로 쪼갤 수 있는데, 처음의 부등식(inequality)이 바로 이것을 측정한다. 1과 같은 부분은 낭비이고, 너무 많은 2는 3으로 바꿀 수 있다. 이러한 조작을 거치고 나면 살아남는 형태는 몇 가지뿐이고, 합 N이 그중 하나를 골라 준다.

풀이

부등식

다음이 성립한다.

$$k \leq 2(k-2) \iff k \leq 2k-4 \iff k \geq 4.$$

따라서 이 부등식을 만족하는 정수는 $k = 4, 5, 6, \ldots$이다. 또한 등호는 $k = 4$일 때만 성립하고, $k \geq 5$이면 부등식은 엄격하다. 즉 $k < 2(k-2)$이다.

최적 분할의 모습

$N \geq 2$를 고정한다. N을 양의 정수들의 합으로 나타내는 방법은 유한개뿐이므로, 가장 큰 곱 $P(N)$이 존재한다. 부분들의 순서는 합에도 곱에도 영향을 주지 않으므로, 분할을 부분들의 모임으로 다룬다. 곱이 $P(N)$인 분할을 **최적** 분할이라 부르자. 세 가지 관찰을 하는데, 각 관찰은 합을 N으로 유지하면서 분할을 바꾼다.

(a) **5 이상인 부분은 없다.** 부분 $m \geq 5$를 두 부분 2와 $m-2$(둘 다 양수)로 바꾸면 곱에

$2(m-2)/m$이 곱해지는데, 엄격한 형태의 부등식에 의해 이 값은 1보다 크다. 따라서 부분 $m \geq 5$를 가진 분할은 최적이 아니다.

$2 \times 2 = 4$이므로(등호가 성립하는 경우 $k = 4$), 4와 같은 부분은 곱을 바꾸지 않고 $2+2$로 바꿀 수 있다. 따라서 최적 분할 가운데에는 3보다 큰 부분이 없는 것이 존재한다. 이제부터는 이러한 최적 분할을 다룬다.

(b) **1인 부분은 없다.** $N \geq 2$이므로 부분 1이 유일한 부분일 수는 없고, 따라서 다른 부분 a가 있다. 두 부분 1과 a를 하나의 부분 $a+1$로 바꾸면 합은 그대로이고, 인수 $1 \times a = a$는 $a+1 > a$로 바뀐다. 그러면 곱이 커지는데, 이는 최적 분할에서는 불가능하다.

(c) **2인 부분은 많아야 두 개이다.** 2가 세 개 있다면, $2+2+2$를 $3+3$으로 바꾸어 인수 8을 9로 바꿀 수 있으므로 역시 곱이 커진다.

따라서 어떤 최적 분할은 a개의 3과 b개의 2로 이루어져 있고($b \in \{0,1,2\}$),

$$N = 3a + 2b, \qquad P(N) = 3^a\, 2^b$$

이다.

> **생각해 보기** 서로 다른 두 쌍 (a,b)가 같은 N에 모두 들어맞아서, 여전히 둘을 비교해야 하는 일이 생길 수 있을까?

그렇지 않다. 3을 법으로 하여 줄이면(modulo) $2b \equiv N \pmod 3$을 얻고, $b = 0,1,2$에 대하여 $2b \equiv 0,2,1 \pmod 3$이 되어 서로 다른 세 나머지(residue)가 나온다. 따라서 N이 b를 결정하고, 그러면 $a = (N-2b)/3$도 결정된다. 그러므로

$$P(N) = \begin{cases} 3^{N/3} & \text{단, } N \equiv 0 \pmod 3, \\ 2 \times 3^{(N-2)/3} & \text{단, } N \equiv 2 \pmod 3, \\ 2^2 \times 3^{(N-4)/3} & \text{단, } N \equiv 1 \pmod 3,\ N \geq 4. \end{cases}$$

$N = 5, \ldots, 9$일 때의 값

이를 각 N에 차례로 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 5 &= 3+2, & P(5) &= 2 \times 3, \\ 6 &= 3+3, & P(6) &= 3^2, \\ 7 &= 3+2+2, & P(7) &= 2^2 \times 3, \\ 8 &= 3+3+2, & P(8) &= 2 \times 3^2, \\ 9 &= 3+3+3, & P(9) &= 3^3, \end{aligned}$$

이로써 요구된 결과를 얻는다. ($N = 7$일 때는 분할 $4 + 3$도 최적이다. 관찰 (a)에서 4를 배제하지 않고 **바꾸는** 것만 허용한 이유가 이것이다.)

$P(1000)$ 구하기

$1000 = 3 \times 332 + 4$이므로 $1000 \equiv 1 \pmod 3$이고, 따라서 $b = 2$, $a = (1000 - 4)/3 = 332$이다. 최적 분할은 332개의 3과 두 개의 2로 이루어지고,

$$P(1000) = 2^2 \times 3^{332}$$

이다. 같은 말이지만, 최적 분할은 332개의 3과 두 개의 2, 또는 332개의 3과 한 개의 4로 이루어진 것이다. (a)–(c)의 조작에 의해 다른 분할은 모두 엄격하게 개선될 수 있으므로, 최적 분할은 이 두 가지뿐이다.

검산

- $N \leq 40$인 N에 대하여 모든 분할을 전수 탐색(brute-force search)한 결과는 주어진 다섯 값을 포함하여 공식과 일치한다.
- $P(n) = \max_{1 \leq p \leq n} p\,P(n-p)$를 이용하여 컴퓨터로 정확히 계산하면 $P(1000) = 4 \times 3^{332}$를 얻는데, 이는 160자리 수이다.
- 타당성 점검으로, 정수가 아닌 "분할"과 비교해 보자. N/x개의 같은 부분으로 나누면 곱은 $x^{N/x}$이고, 이 값은 $x = \mathrm{e} \approx 2.72$에서 최대가 된다. 바로 이 때문에 3들이(그리고 가끔의 2가) 이기는 것이다.

흔한 실수

- $1000 = 3 \times 333 + 1$로 쓰고 3^{333}이라고 답하는 것. 이 분할에는 1이 들어 있고, $4 > 3$이므로 $3 + 1$은 $2 + 2$로 바꾸어야 한다.
- 부분 4가 "나타날 수 없다"고 말하는 것. 4는 최적 분할에 나타날 수 있다. 다만 $2 + 2$보다 나은 결과를 주는 일이 없을 뿐이다.
- $N = 5, \ldots, 9$일 때의 값을 나열하기만 하고 이보다 나은 것이 없음을 보이지 않는 것. 이 값들이 최대임을 증명하는 것은 구조에 대한 논증이다.

STEP 너머

여기서의 논증은 전형적인 **극값 논법**(*extremal argument*) 또는 **교환 논법**(*exchange argument*)이다. 즉 가장 좋은 대상이 존재한다고 가정하고, 그것이 어떤 국소적 패턴을 피

해야 함을 보인다. 같은 아이디어가 조합론(combinatorics)에서, 탐욕 알고리즘(greedy algorithm)이 최적임을 증명할 때, 그리고 정수 분할(integer partition) 이론에서 나타난다. 연속 버전($x^{N/x}$를 최대화하는 문제)은 즐거운 미적분 연습 문제이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를, 합동식(congruence)과 초등 정수론(number theory)에 관해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.