풀이

STEP III 1996, 문제 3

순수수학 • 반각 치환

> **STEP III 1996, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q3

핵심 아이디어

$1/(\text{상수} + \text{상수}\cdot\cos x)$ 꼴로 이루어진 피적분함수(integrand)는 반각 치환(half-angle substitution) $t = \tan\frac{1}{2}x$를 쓰는 전형적인 경우이다. 이 치환은 $\sin x$와 $\cos x$의 임의의 유리함수(rational function)를 t의 유리함수로 바꾼다. 여기서는 표준적인 꼴 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2)$이 나오고, 그 결과로 역탄젠트(inverse tangent)가 얻어진다. 그다음 두 "따라서(hence)" 결과는 각 피적분함수를 $1/(1-a\cos x)$ 꼴로 다시 맞추고 a와 θ를 고르기만 하면 된다.

풀이

일반적인 적분

$t = \tan\frac{1}{2}x$로 놓는다. x가 0에서 θ까지 움직일 때 t는 0에서 $T = \tan\frac{1}{2}\theta$까지 움직이며, $0 < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\pi$이므로 T는 유한한 양수이다. 표준적인 반각 공식에 의해

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

이고, 두 번째 식은 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1+t^2)$이기 때문이다. 그러면

$$1 - a\cos x = \frac{(1+t^2) - a(1-t^2)}{1+t^2} = \frac{(1-a)+(1+a)t^2}{1+t^2},$$

이므로 $1+t^2$ 인수가 약분되어

$$\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^T \frac{2}{(1-a)+(1+a)t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{1+a}\int_0^T \frac{1}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad k^2 = \frac{1-a}{1+a}.$$

이다. $-1 < a < 1$이므로 $1-a$와 $1+a$는 모두 양수이고, 따라서 $k = \sqrt{(1-a)/(1+a)}$는 진짜 양의 실수이다. (바로 이 지점에서 a에 대한 조건이 쓰인다. $|a| \geq 1$이면 분모

가 0이 될 수 있어서 적분이 이상적분(improper integral)이 되거나 답이 로그가 된다.) $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2) = \frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$를 이용하면

$$\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+a)k}\tan^{-1}\frac{T}{k}.$$

이다. 마지막으로 $(1+a)k = \sqrt{(1+a)^2}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \sqrt{1-a^2}$이므로

$$\boxed{\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\tfrac{1}{2}\theta\right).}$$

? 생각해 보기 왜 $\theta < \pi$가 필요할까?

치환 $t = \tan\frac{1}{2}x$는 $x = \pi$에서 성립하지 않는데, 이때 t가 무한대가 되기 때문이다. $\theta < \pi$로 두면 구간 $[0,\theta]$ 전체가 유한한 구간 $[0, \tan\frac{1}{2}\theta]$로 옮겨지므로, 공식에 특별히 주의할 점이 없다. ($\theta \to \pi$로 보내면 $\tan^{-1}$이 $\frac{1}{2}\pi$로 가므로 $\pi/\sqrt{1-a^2}$을 얻는다.)

첫 번째 "따라서"

인수 2를 묶어 낸다.

$$\frac{1}{2-a\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a\cos x}.$$

적분이 유한하려면 $-2 < a < 2$이어야 하고, 이때 $b = \frac{1}{2}a$는 $-1 < b < 1$을 만족한다. 따라서 a를 b로 바꾸고 $\theta = \frac{1}{2}\pi$로 두어 일반적인 결과를 적용할 수 있으며, 이때 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{2-a\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}a}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+a}{2-a}},\end{aligned}$$

여기서 $\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$을 쓰고, 역탄젠트 안의 분수에서 분자와 분모에 각각 2를 곱하였다. 이것이 구하는 결과이다.

두 번째 "따라서"

이번에는 $\sqrt{2}$를 묶어 낸다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x},$$

따라서 $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$($(-1,1)$에 속한다)와 $\theta = \frac{3}{4}\pi$($(0,\pi)$에 속한다)를 쓴다. 그러면 $\sqrt{1-a^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이고,

$$\frac{1+a}{1-a} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2,$$

이다. 여기서 분자와 분모에 $\sqrt{2}-1$을 곱하고 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$을 이용하였다. 그러므로 제곱근은 $\sqrt{2}-1$이고, 일반 공식에 의해

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1/\sqrt{2}} \tan^{-1}\left((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\right) = 2\tan^{-1}\left((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\right).$$

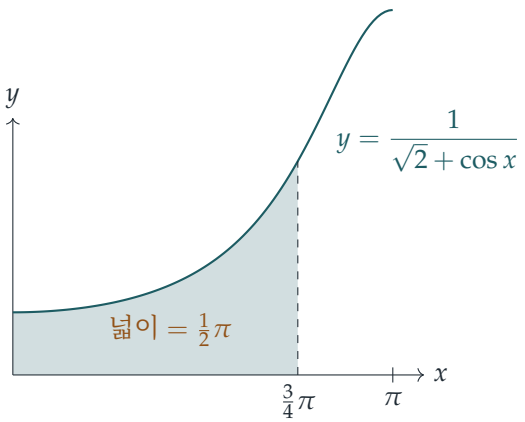
? 생각해 보기 $\tan\frac{3}{8}\pi$는 얼마일까?

$u = \tan\frac{1}{8}\pi > 0$로 두고 배각 공식(double-angle formula)을 쓰면 $1 = \tan\frac{1}{4}\pi = \frac{2u}{1-u^2}$이므로 $u^2+2u-1 = 0$이고 $u = \sqrt{2}-1$(양의 근)이다. $\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi$이므로 $\tan\frac{3}{8}\pi = \cot\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$을 얻는다.

따라서 $(\sqrt{2}-1)\tan\frac{3}{8}\pi = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$이고,

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x = 2\tan^{-1}1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

이므로 원하는 결과가 나온다.



검산

▶ $a = 0$이면 일반 공식은 $2\tan^{-1}(\tan\frac{1}{2}\theta) = \theta$를 주는데, 이는 $\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}x$와 같다. 마찬가지로 첫 번째 "따라서"에서 $a = 0$으로 두면 $\frac{2}{2}\tan^{-1}1 = \frac{1}{4}\pi = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$를 얻는다.

- 상자 안의 답을 θ에 대하여 미분하면 다시 $1/(1-a\cos\theta)$가 나와야 한다. 연쇄법칙(chain rule)을 연습하기에 좋은 문제이다.
- 마지막 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 1.5707963…이 나와 $\frac{1}{2}\pi$와 일치한다. 일반 공식과 첫 번째 "따라서" 결과도 무작위로 고른 수백 가지 a와 θ에 대하여 심프슨 공식과 10^{-10} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 피적분함수를 $1/(1-a\cos x)$ 꼴로 맞출 때 밖으로 묶어 낸 인수 $\frac{1}{2}$(또는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$)를 빠뜨린다.
- 마지막 부분에서 $a=+\frac{1}{\sqrt{2}}$를 쓴다. $\sqrt{2}+\cos x$의 부호 때문에 a는 음수이다.
- k를 놓친다. 답은 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$이지, $\tan^{-1}(t/k)$나 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(kt)$가 아니다.

STEP 너머

치환 $t=\tan\frac{1}{2}x$(흔히 바이어슈트라스 치환(Weierstrass substitution)이라고 부른다)가 잘 통하는 이유는, 이 치환이 단위원(unit circle)을 유리함수로 매개화(parametrise)하기 때문이다. 그래서 $\sin x$와 $\cos x$의 임의의 유리함수가 t의 유리함수로 바뀌고, 이는 언제나 부분분수(partial fractions)를 이용해 적분할 수 있다. $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x/(1-a\cos x)=2\pi/\sqrt{1-a^2}$ 같은 적분은 복소해석학(complex analysis)에서 경로적분(contour integration)의 표준적인 첫 예제이기도 한데, 이때는 치환 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$와 유수 정리(residue theorem)가 일을 해 준다. 이러한 관점에 대해서는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.