풀이

STEP III 1996, 문제 2

순수수학 • 연립일차방정식

STEP III 1996, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q2

핵심 아이디어

미지수가 세 개인 일차방정식 세 개는 계수의 행렬식(determinant)이 0이 되지 않는 한 해를 정확히 하나 가진다. 따라서 먼저 할 일은 행렬식을 0으로 만드는 a의 값을 찾는 것이다. 그 밖의 모든 a에 대해서는 그냥 풀면 된다. 이 문제의 진짜 내용은 예외적인 값에 있는데, 거기서는 b에 따라 방정식이 모순(inconsistent)인지, 아니면 무수히 많은 해를 가지는지를 판단해야 한다.

풀이

방정식에 다음과 같이 번호를 붙인다.

$$x + y + az = 2, \tag{1}$$
$$x + ay + z = 2, \tag{2}$$
$$2x + y + z = 2b. \tag{3}$$

해가 유일한 것은 언제인가?

계수행렬(coefficient matrix)의 행렬식은 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a-1) - 1(1-2) + a(1-2a)$$
$$= 2a - 2a^2 = 2a(1-a).$$

따라서 $a \neq 0$이고 $a \neq 1$이면 b의 값에 관계없이 해가 정확히 하나 존재한다. $a = 0$인 경우와 $a = 1$인 경우는 따로 다루어야 한다.

일반적인 경우: $a \neq 0, 1$

(1)에서 (2)를 빼면

$$(1-a)y - (1-a)z = 0,$$

을 얻고, $a \neq 1$이므로 $1-a$로 나누어 $y = z$를 얻는다. $z = y$를 (1)과 (3)에 대입하면

$$x + (1+a)y = 2, \qquad 2x + 2y = 2b, \ \text{즉 } x + y = b.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $ay = 2 - b$이고, $a \neq 0$이므로

$$y = z = \frac{2-b}{a}, \qquad x = b - \frac{2-b}{a} = \frac{(a+1)b - 2}{a}.$$

이를 (1), (2), (3)에 다시 대입하면 이것이 해임을 확인할 수 있고, 위의 논증에 의해 이것이 유일한 해이다.

$a = 0$인 경우

방정식은 다음과 같이 된다.

$$x + y = 2, \qquad x + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

처음 두 식을 더하면 $2x + y + z = 4$이다. 따라서 셋째 방정식의 좌변은 4와도 같고 $2b$와도 같아야 한다.

? **생각해 보기** 행렬식이 0이면 "해가 없다"는 뜻일까?

그것만으로는 그렇지 않다. 행렬식이 0이라는 것은 방정식들이 종속(dependent)이라는 뜻이므로, 방정식들이 서로 모순되거나 그중 하나가 새로운 정보를 전혀 주지 않는다. 둘 중 어느 쪽이 일어나는지는 우변에, 여기서는 b에 달려 있다.

- $b \neq 2$이면 $4 = 2b$가 거짓이므로 **해가 없다**.
- $b = 2$이면 셋째 방정식은 처음 두 방정식의 합일 뿐이므로 $x + y = 2$와 $x + z = 2$만 남는다. $x = t$라 두면 해는

$$(x, y, z) = (t,\ 2 - t,\ 2 - t), \qquad t\text{는 임의의 실수.}$$

$a = 1$인 경우

이제 (1)과 (2)는 같은 방정식 $x + y + z = 2$이고, 연립방정식은

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

가 된다. 둘째 식에서 첫째 식을 빼면 $x = 2b - 2$이고, 그러면 $y + z = 2 - x = 4 - 2b$이다. 이 두 방정식은 결코 서로 모순되지 않으므로, **모든** b의 값에 대해 해가 무수히 많다.

$$(x, y, z) = (2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s), \qquad s\text{는 임의의 실수.}$$

요약

- $a \neq 0, 1$: 유일한 해 $x = \dfrac{(a+1)b - 2}{a}$, $y = z = \dfrac{2 - b}{a}$.
- $a = 0$, $b \neq 2$: 해가 없다.
- $a = 0$, $b = 2$: 임의의 t에 대해 $(t,\ 2 - t,\ 2 - t)$.
- $a = 1$, 임의의 b: 임의의 s에 대해 $(2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s)$.

검산

$a = 2$, $b = 4$로 두면 공식에서 $y = z = -1$, $x = 5$를 얻고, 실제로 $5 - 1 - 2 = 2$, $5 - 2 - 1 = 2$, $10 - 1 - 1 = 8 = 2b$이다. 구조적인 검산으로, 일반 공식은 분모에 a가 있으므로 $a = 0$에서 성립하지 않아야 한다. 실제로 그러하며, 따로 수행한 분석이 그 이유를 보여 준다. $a = 1$에서는 공식이 여전히 의미를 가지며 $(2b - 2,\ 2 - b,\ 2 - b)$를 주는데, 이는 해의 족에서 $s = 2 - b$에 해당하는 것이다. 이제는 $y = z$가 강제되지 않으므로, 이것은 많은 해 가운데 하나일 뿐이다. 우리는 a, b와 매개변수의 여러 무작위 값에 대해 정확한 유리수 연산으로 모든 경우를 확인하였다.

흔한 실수

- $a \neq 1$ 또는 $a \neq 0$이라는 말 없이 $1 - a$나 a로 나누는 것. 바로 그 나눗셈에 특수한 경우가 숨어 있다.
- 행렬식이 0이면 해가 없다고 가정하는 것. $a = 1$이면 언제나 해가 무수히 많고, $a = 0$이면 $b = 2$일 때 해가 존재한다.
- 무수히 많은 해의 족을 명시적으로 기술하는 것을 잊는 것. "해가 무수히 많다"고 말하는 것은 방정식을 푸는 것과 같지 않다.

STEP 너머

각 방정식은 3차원 공간의 평면(plane)을 나타내며, 이 문제는 세 평면이 어떻게 만날 수 있는지를 묻는 것이다. 한 점에서 만나거나, 공통의 직선을 따라 만나거나, 전혀 만나지 않는

다($a = 0, b \neq 2$인 경우 평면들은 둘씩 만나 세 개의 평행한 직선을 이루는데, 마치 삼각기둥의 옆면과 같다). 이를 체계적으로 다루는 도구는 가우스 소거법(Gaussian elimination)과 행렬의 랭크(rank)라는 개념이다. 연립방정식은 우변을 덧붙여도 랭크가 커지지 않을 때, 그리고 그때에만 해를 가진다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.