풀이

STEP III 1996, 문제 14

확률과 통계 • 두 상태 마르코프 과정

> **STEP III 1996, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q14

핵심 아이디어

시간을 길이 δt인 아주 짧은 구간으로 잘게 나누고, 그 한 구간 안에서 무슨 일이 일어날 수 있는지 묻는다. 그러면 기댓값으로 나타낸 횟수는 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해 그대로 더해지고, 수리 중일 확률은 "들어오는 양 빼기 나가는 양"이라는 간단한 균형식을 따르는데, 이 식은 $\delta t \to 0$일 때 1계 선형 미분방정식(first-order linear differential equation)이 된다. $p(t)$를 구하고 나면, 수리 시간의 기댓값은 그저 그 적분이다.

풀이

펑크 횟수의 기댓값

펑크는 실제로 자전거를 타는 동안에만 날 수 있고, 자전거를 타고 있는 동안에는 자전거가 멀쩡한 상태이다. 자전거를 탄 전체 시간 T를 길이 $\delta t = T/n$인 작은 조각 n개로 나눈다. X_k를 k번째 조각에서 일어난 펑크의 횟수라 하자. δt에 대한 1차 근사까지 보면 X_k는 확률 $\alpha\,\delta t$로 1이고 그렇지 않으면 0이므로, $\mathrm{E}(X_k) = \alpha\,\delta t$이다. 기댓값의 선형성에 의해(독립성은 필요 없다)

$$\mathrm{E}(\text{펑크 횟수}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = n\alpha\,\delta t = \alpha T.$$

여기서 시계는 자전거를 탄 시간만 재므로, 수리하는 데 쓴 시간은 들어가지 않는다.

$p(t)$에 대한 방정식

이제 t를 수리 시간까지 포함한 실제 (시계) 시간이라 하자. 시각 t에 나는 수리 중이거나(확률 $p(t)$) 자전거를 타고 있다(확률 $1-p(t)$). 시각 $t+\delta t$에 내가 수리 중인 경우는 다음 둘 중 하나이다.

- 시각 t에 수리 중이었고 $(t, t+\delta t)$에서 수리가 끝나지 **않았다**: 확률 $p(t)(1-\beta\,\delta t)$. 또는
- 시각 t에 자전거를 타고 있었고 $(t, t+\delta t)$에서 펑크가 났다: 확률 $(1-p(t))\,\alpha\,\delta t$.

이 두 경우는 서로 배반이므로, $(\delta t)^2$ 차수의 항(아주 짧은 한 구간에서 두 사건이 일어나는 경우)을 무시하면

$$p(t+\delta t) = p(t)(1-\beta\,\delta t) + \big(1-p(t)\big)\alpha\,\delta t.$$

정리하면

$$\frac{p(t+\delta t)-p(t)}{\delta t} = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t),$$

이고, $\delta t \to 0$으로 보내면

$$p'(t) = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t).$$

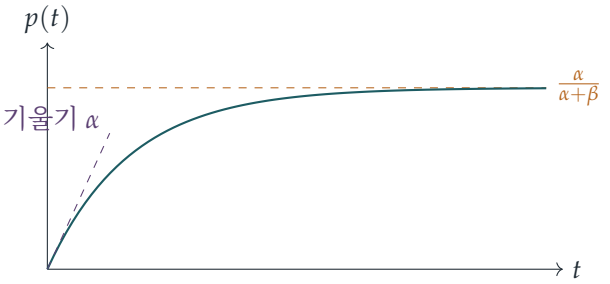
처음에 자전거는 멀쩡한 상태이므로 초기 조건(initial condition)은 $p(0)=0$이다.

주어진 해 확인하기

$p(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big)$에 대하여 $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-1) = 0$이고,

$$p'(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t},$$
$$\alpha - (\alpha+\beta)p(t) = \alpha - \alpha\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}.$$

두 식이 일치하므로, 요구한 대로 p는 미분방정식과 초기 조건을 만족한다.



그래프는 p가 0에서 시작하여 처음 기울기 α로 올라가면서 장기적인 수준 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$에 다가가는 모습을 보여 준다.

수리 시간의 기댓값

R를 $[0, T]$ 동안 수리하는 데 쓴 시간이라 하고, $I(t)$를 시각 t에 수리 중이면 1, 그렇지 않으면 0이라 하자. 그러면 $R = \int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$이다. $\mathrm{E}(I(t)) = p(t)$이므로, 기댓값을 취하면(이번에도 선형성일 뿐이며, 적분을 작은 구간들에 대한 합의 극한으로 보고 적용한 것이다)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R) = \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[t + \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\right]_0^T \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(T - \frac{1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)T}}{\alpha+\beta}\right).\end{aligned}$$

? **생각해 보기** 수리 시간의 기댓값이 왜 확률의 적분과 같을까?

각각의 작은 구간 $(t, t+\delta t)$에서 수리하는 데 쓴 시간은 확률 $p(t)$로 약 δt이고 그렇지 않으면 0이므로, 그 기댓값은 $p(t)\,\delta t$이다. 이를 모든 구간에 대해 더하면 $\sum p(t)\,\delta t \to \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t$이다.

두 가지 근사

$x = (\alpha+\beta)T$라 두자. 전체 이동 시간 중 수리하는 데 쓴 시간의 비율의 기댓값은

$$F = \frac{\mathrm{E}(R)}{T} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right).$$

x가 작을 때. $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \cdots$를 이용하면 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$이므로

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{2} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)T}{2} = \frac{\alpha T}{2}.$$

이는 이치에 맞는다. 짧은 이동에서는 $p(t) \approx \alpha t$이고, 이것의 $[0, T]$에서의 평균은 $\alpha T/2$이다.

x가 클 때. 이때 $0 < \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} < \dfrac{1}{x}$이고 이 값은 작으므로

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

긴 이동에서는 거의 모든 시간 동안 $p(t)$가 평형(equilibrium) 값 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$에 자리 잡고 있다.

검산

- 평형: $p' = 0$으로 두면 $\alpha(1-p) = \beta p$, 즉 "들어오는 비율과 나가는 비율이 같다"는 식이 되어 $p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$이고, 이는 T가 클 때의 극한과 일치한다.

- $\beta \to \infty$(즉시 수리)이면 수리와 관련된 모든 값이 마땅히 0으로 간다.
- $\alpha = 0.7, \beta = 2.3, T = 2.5$일 때 공식은 $\mathrm{E}(R) \approx 0.5056$을 준다. 2×10^5번의 이동을 시뮬레이션한 결과(지수분포를 따르는 주행 구간과 수리 구간을 번갈아 둠) 0.5058을 얻었고, 주행 시간 2.5 동안의 펑크 횟수를 시뮬레이션한 평균은 $1.750 = \alpha T$였다.

흔한 실수

- 펑크 항에 인수 $(1 - p(t))$를 빠뜨리는 것. 펑크는 자전거를 타고 있을 때만 날 수 있다.
- $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$를 쓰거나 초기 조건을 밝히지 않는 것. 자전거는 멀쩡한 상태에서 출발하므로 $p(0) = 0$이다.
- x가 작을 때의 전개에서 2차 항을 버려서 $F \approx 0$이 남고 $\alpha T/2$를 얻지 못하는 것.

STEP 너머

이것은 상태가 두 개인 연속 시간 마르코프 연쇄(continuous-time Markov chain)이다. 자전거는 "작동 중"과 "수리 중" 사이를 비율 α와 β로 오가며, p에 대한 방정식은 콜모고로프(Kolmogorov) 전진 방정식(forward equations)의 가장 간단한 경우이다. 같은 모형으로 고장 나고 수리되는 기계, 열리고 닫히는 이온 채널, 그리고 대기행렬 이론(queueing theory)의 많은 부분을 기술할 수 있다. 주행 시간 동안의 펑크 횟수는 비율이 α인 푸아송 과정(Poisson process)이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 푸아송 과정과 마르코프 연쇄를 알맞은 수준으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.