풀이

STEP III 1996, 문제 11

역학 • 미소 진동

STEP III 1996, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q11

핵심 아이디어

원의 기하에 관한 두 가지 사실이 문제를 해결한다. AC가 지름이므로 각 ABC는 직각이다. 이로부터 두 줄의 길이를, 따라서 두 장력(tension)을 θ로 나타낼 수 있다. 또한 중심각은 원주각의 두 배이므로, B는 중심에 대하여 2θ만큼 회전한 것이다. 따라서 C에서 B까지의 호의 길이는 $2a\theta$이고, 접선 방향으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면 운동 방정식(equation of motion)을 얻는다. 진동에 대해서는 평형점(equilibrium) 근처에서 선형화(linearise)한다.

시작하기 전에 주의할 점이 있다. 문제에 인쇄된 방정식에는 $mg\sin 2\theta$가 있어야 할 자리에 $mg\sin\theta$가 적혀 있다. 아래의 유도 과정이 그 이유를 보여 주며, 수정된 방정식이어야만 문제에 주어진 $5\lambda = 24mg$와 주기가 나온다.

풀이

운동 방정식

모형. 고리 B는 매끄러운 철사 위에 있는 질량 m인 입자이므로, 철사는 반지름 방향의 수직항력 R만 작용한다. 줄은 가볍고 탄성이 있으며 훅의 법칙(Hooke's law)을 따른다. 즉 자연길이가 a인 줄을 길이 ℓ까지 늘이면 장력은 $\lambda(\ell - a)/a$이다.

기하. AC는 지름(길이 $2a$)이므로, 반원에 대한 원주각에 의해 $\angle ABC = 90^\circ$이다. 직각삼각형 ABC에서

$$AB = 2a\cos\theta, \qquad CB = 2a\sin\theta.$$

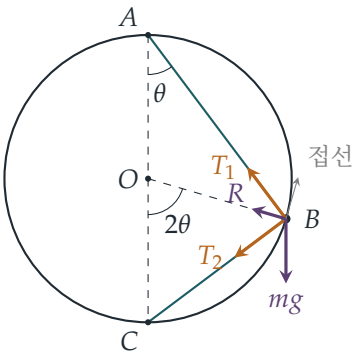
원주각 $\angle CAB = \theta$는 호 CB에 대한 각이므로, 중심각은 $\angle COB = 2\theta$이다. C에서 B까지의 호의 길이는 $s = 2a\theta$이므로, θ가 증가하는 방향(A를 향하는 방향)으로 철사를 따라 측정한

B의 가속도는 $\ddot{s} = 2a\ddot{\theta}$이다.

장력. BA와 BC의 장력은

$$T_1 = \lambda \frac{2a\cos\theta - a}{a} = \lambda(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = \lambda(2\sin\theta - 1).$$

두 줄이 모두 팽팽할 필요충분조건은 $\cos\theta > \frac{1}{2}$이고 $\sin\theta > \frac{1}{2}$인 것, 즉 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$이다.



B에서의 접선 방향으로 힘의 분해. 접선은 OB에 수직이므로, R은 접선 방향 성분을 갖지 않는다.

- 삼각형 OAB는 이등변삼각형($OA = OB = a$)이므로 $\angle OBA = \angle OAB = \theta$이다. 따라서 BA는 접선과 $90° - \theta$의 각을 이루고, T_1은 A를 향하는 방향으로 $T_1\sin\theta$만큼 기여한다.
- 삼각형 OCB는 이등변삼각형이고 $\angle OCB = \angle ACB = 90° - \theta$이므로 $\angle OBC = 90° - \theta$이다. 따라서 BC는 접선과 θ의 각을 이루고, T_2는 A에서 멀어지는 방향으로 $T_2\cos\theta$만큼 기여한다.
- OB는 연직 아래 방향과 2θ의 각을 이루므로, 접선은 수평 방향과 2θ의 각을 이룬다. 중력은 A에서 멀어지는 방향으로 $mg\sin 2\theta$만큼 기여한다.

접선 방향으로 뉴턴의 제2법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} 2ma\ddot{\theta} &= \lambda(2\cos\theta - 1)\sin\theta - \lambda(2\sin\theta - 1)\cos\theta - mg\sin 2\theta \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta, \end{aligned}$$

이다. $2\lambda\sin\theta\cos\theta$ 항들이 소거되기 때문이다. 이것이 구하는 방정식이다. 다만 중력 항은 인쇄된 $mg\sin\theta$가 아니라 $mg\sin 2\theta$이다.

생각해 보기 혹시 인쇄된 $mg\sin\theta$가 결국 맞는 것은 아닐까?

그렇지 않다. $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때 고리는 O와 같은 높이에 있고, 접선은 연직이며, 무게 mg 전체가 철사를 따라 작용한다. 이때 $mg\sin 2\theta = mg$이지만 $mg\sin\theta = mg/\sqrt{2}$이다. 다음 소문항도 이를 확인해 준다. 인쇄된 방정식을 쓰면 평형 상태에서 $\frac{24}{5}mg$가 아니라 $\lambda = 3mg$가 나온다.

평형

$\sin\theta = \frac{3}{5}$이면 (θ를 예각으로 잡을 때) $\cos\theta = \frac{4}{5}$이고, $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$이고 $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$이므로 θ는 줄이 팽팽한 범위에 있다. $\ddot{\theta} = 0$으로 놓으면

$$\lambda\left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\right) = mg\cdot 2\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\lambda}{5} = \frac{24mg}{25} \quad\Longrightarrow\quad 5\lambda = 24mg,$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

미소 진동

$f(\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta$로 두면 $2ma\ddot{\theta} = f(\theta)$이고, 평형점 θ_0에서 $f(\theta_0) = 0$이다. ε이 작을 때 $\theta = \theta_0 + \varepsilon$으로 놓자. 1차 근사로 $f(\theta_0+\varepsilon) \approx f'(\theta_0)\,\varepsilon$이고, 여기서

$$\begin{aligned} f'(\theta_0) &= -\lambda(\sin\theta_0 + \cos\theta_0) - 2mg\cos 2\theta_0 \\ &= -\tfrac{24}{5}mg\cdot\tfrac{7}{5} - 2mg\left(\tfrac{16}{25} - \tfrac{9}{25}\right) = -\tfrac{168}{25}mg - \tfrac{14}{25}mg = -\tfrac{182}{25}mg. \end{aligned}$$

따라서

$$2ma\ddot{\varepsilon} = -\tfrac{182}{25}mg\,\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\varepsilon} = -\frac{91g}{25a}\,\varepsilon.$$

이것은 $\omega^2 = \dfrac{91g}{25a}$인 단진동(simple harmonic motion)이다. $f'(\theta_0) < 0$이므로 이 평형은 안정(stable)하다. 변위가 작으므로 줄은 팽팽한 상태를 유지한다(θ는 θ_0 근처, 즉 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$의 충분히 안쪽에 머문다). 주기는 근사적으로

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\cdot 5\sqrt{\frac{a}{91g}} = 10\pi\sqrt{\frac{a}{91g}}.$$

검산

- $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 두 줄은 같은 길이만큼 늘어나 있으므로 접선 방향 효과가 상쇄되고($\cos\theta - \sin\theta = 0$), 무게 전체가 연직인 접선을 따라 작용한다. 우리의 방정식은 $2ma\ddot{\theta} = -mg$를 주므로 올바르다.
- $a = g = m = 1$, $\lambda = 4.8$로 두고 위치 벡터로부터 접선 방향 힘을 계산하였다. 이 힘은 $\sin\theta = 0.6$에서 0이 된다. 작은 변위에서 출발하여 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하였더니 주기가 3.29328로 나와, $10\pi/\sqrt{91} \approx 3.29328$과 일치하였다.

흔한 실수

- 호의 길이를 $a\theta$로 잡는 것. 고리는 중심에 대하여 θ가 아니라 2θ만큼 회전하므로, 접선 방향 가속도는 $2a\ddot{\theta}$이다. 좌변의 2는 여기서 나온다.
- 접선 방향이 아니라 현의 방향으로 힘을 분해하는 것. 수직항력은 미지수이므로, 이를 소거하려면 접선 방향으로 분해해야 한다.

STEP 너머

평형점 근처에서 $\ddot{x} = f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$로 선형화하는 것은 비선형계(nonlinear system)의 안정성 분석에서 첫 단계이다. 이로부터 $f'(x_0) < 0$일 때 안정하고, $\omega^2 = -f'(x_0)$인 단진동이 일어난다는 것을 알 수 있다. 대학에서는 이것이 기준 진동(normal mode)과 행렬의 고윳값(eigenvalue)을 통해 여러 자유도를 가진 계로 확장된다. 더 읽어 보려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.