풀이

STEP III 1996, 문제 10

역학 • 마찰이 있는 평형

STEP III 1996, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q10

핵심 아이디어

여섯 개의 평형(equilibrium) 방정식(각 원기둥마다 두 방향의 힘의 분해(resolution)와 하나의 모멘트(moment) 방정식)을 세우면, 이 방정식들이 모든 접촉력을 유일하게 결정한다는 것을 알게 된다. 핵심은 모멘트 방정식이다. 각 원기둥에는 중심에 대한 모멘트를 갖는 마찰력(frictional force)이 단 두 개뿐이므로, 이 두 힘의 크기는 같아야 한다. 그다음부터 네 개의 부등식은 각각 세 접촉선 중 하나에서의 "마찰력 $\leq$ 계수 $\times$ 수직항력(normal reaction)"이라는 조건이거나, 두 원기둥 사이에서 미는 힘이 음이 아니라는 조건일 뿐이다.

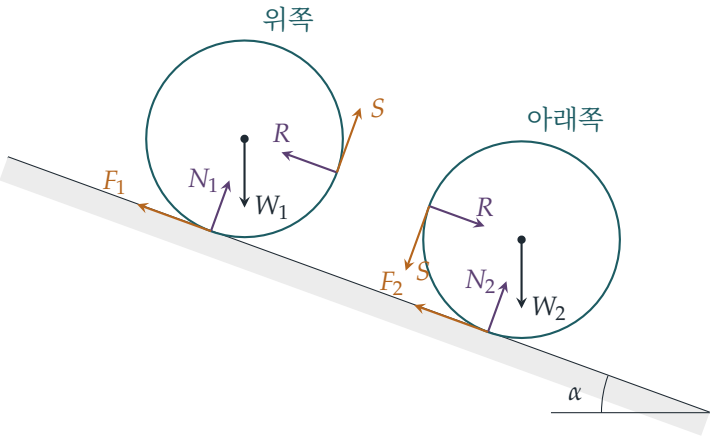
풀이

모형. 각 원기둥은 반지름이 a인 균일한 강체(rigid body)이므로 무게는 중심(축 위)에 작용한다. 두 중심을 지나는 연직 단면에서 생각한다. 반지름이 같고 두 원기둥이 모두 평면 위에 놓여 있으므로 중심선은 평면과 평행하고, 두 원기둥의 접촉점은 그 중심선의 중점이다. x축 방향은 경사면을 따라 **아래쪽**으로, y축 방향은 평면에 수직이고 평면 바깥쪽을 향하도록 잡는다.

힘을 다음과 같이 정의한다(모든 성분은 부호가 어느 쪽으로든 나올 수 있다).

- N_1, N_2: 평면이 위쪽 원기둥과 아래쪽 원기둥에 작용하는 수직항력;
- F_1, F_2: 평면이 두 원기둥에 작용하는 마찰력으로, 경사면을 따라 **위쪽**을 양의 방향으로 잰다;
- R: 두 원기둥 사이의 수직력으로, 중심선을 따라 작용하며 아래쪽 원기둥은 경사면 아래로, 위쪽 원기둥은 경사면 위로 민다;
- S: 두 원기둥 사이의 마찰력으로, 평면에 수직이며 위쪽 원기둥에는 평면에서 **멀어지는**

방향으로, 따라서 (뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 의해) 아래쪽 원기둥에는 평면을 **향하는** 방향으로 작용한다.



(알아보기 쉽도록 두 원기둥을 떨어뜨려 그렸다. R와 S는 하나의 접촉선에서 작용한다. 각 무게는 중심을 지나 연직 아래로 작용한다.)

모멘트. 각 원기둥의 중심에 대한 모멘트를 생각한다. 수직력 N_1, N_2, R와 무게는 모두 중심을 지나므로 모멘트를 갖는 힘은 마찰력뿐이다. 각 마찰력은 중심에서 거리 a인 곳에서 접선 방향으로 작용한다. 위쪽 원기둥에서 F_1(경사면 위쪽 방향, 원기둥의 맨 아래에서 작용)과 S(평면에서 멀어지는 방향, 경사 아래쪽 옆면에서 작용)는 서로 반대 방향의 모멘트를 가지므로

$$aF_1 = aS, \qquad \text{따라서} \qquad F_1 = S.$$

마찬가지로 아래쪽 원기둥에서 F_2(경사면 위쪽 방향, 맨 아래에서 작용)와 S(평면을 향하는 방향, 경사 위쪽 옆면에서 작용)는 서로 반대 방향의 모멘트를 가지므로 $F_2 = S$이다. 따라서

$$F_1 = F_2 = S.$$

? **생각해 보기** 평면이 각 원기둥에 작용하는 마찰력이 왜 두 원기둥 사이의 마찰력과 같아야 하는가?

자유롭게 구를 수 있는 원기둥이 평형을 유지하려면 축에 대한 짝힘(couple)이 상쇄되어야 하는데, 축에 대한 모멘트를 갖는 힘은 마찰력뿐이기 때문이다. 방향도 확인할 수 있다. 위쪽 원기둥에서 맨 아래에 경사면 위쪽으로 작용하는 평면의 마찰력은 원기둥을 경사 아래로, 즉 그림에서 시계 방향으로 굴리려 하고, 경사 아래쪽 옆면에서 위로 작용하는 마찰력은 원기둥을 반시계 방향으로 돌린다.

힘의 분해. 평면에 평행한 방향(경사면 아래쪽이 양의 방향):

$$\begin{aligned} \text{위쪽:} \quad & W_1 \sin\alpha - F_1 - R = 0, \\ \text{아래쪽:} \quad & W_2 \sin\alpha - F_2 + R = 0. \end{aligned}$$

두 식을 더하고 $F_1 = F_2 = S$를 이용하면

$$F_1 = F_2 = S = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha,$$

이고, 이는 예상대로 무게의 경사면 아래 방향 성분 전체의 절반이다. 이어서 두 식을 빼면

$$R = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

평면에 수직인 방향(바깥쪽이 양의 방향):

$$\begin{aligned} \text{위쪽:} \quad & N_1 - W_1\cos\alpha + S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_1 = W_1\cos\alpha - \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha, \\ \text{아래쪽:} \quad & N_2 - W_2\cos\alpha - S = 0 \quad \Longrightarrow \quad N_2 = W_2\cos\alpha + \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha. \end{aligned}$$

이렇게 여섯 개의 방정식이 여섯 개의 힘을 모두 결정한다. 평형은 이 힘들이 물리적으로 허용될 때, 즉 모든 수직항력이 음이 아니고 모든 마찰력이 마찰계수(coefficient of friction)와 해당 수직항력의 곱 이하일 때, 그리고 오직 그때에만 가능하다.

소문항 (i)

두 원기둥은 서로를 밀 수만 있으므로 $R \geq 0$이다. $\sin\alpha > 0$이므로 $W_1 \geq W_2$를 얻는다.

소문항 (ii)

두 원기둥 사이의 접촉에서는 $S \leq \mu R$이어야 한다.

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \leq \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

좌변은 양수이므로 $R > 0$, 즉 $W_1 > W_2$이어야 한다(실제로 무게가 같은 경우는 불가능하다). 양수 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$로 나누면

$$\mu \geq \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

위쪽 원기둥과 평면의 접촉에서는 $N_1 \geq 0$이고 $F_1 \leq \mu_1 N_1$이어야 한다. $F_1 > 0$이므로 두 번째 조건에서 이미 $N_1 > 0$이 따라 나온다. $F_1 \leq \mu_1 N_1$을 $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0$로 나누면

$$1 \leq \mu_1 \left(\frac{2W_1\cos\alpha}{(W_1 + W_2)\sin\alpha} - 1 \right) = \mu_1 \left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1 \right).$$

괄호 안은 $N_1/\left(\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha\right)$이고 양수이므로 이것으로 나눌 수 있다.

$$\mu_1 \geq \left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1+W_2}-1\right)^{-1}.$$

(평형을 위해서는 괄호 안이 양수, 즉 $\tan\alpha < 2W_1/(W_1+W_2)$이어야 한다. 그렇지 않으면 위쪽 원기둥이 평면에서 들려 올라간다.)

μ_2에 대한 부등식

여기서 $N_2 = W_2\cos\alpha + \frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$는 저절로 양수이고, $F_2 \leq \mu_2 N_2$를 $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$로 나누면

$$1 \leq \mu_2\left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right), \qquad \text{즉} \qquad \mu_2 \geq \left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right)^{-1}.$$

생각해 보기 왜 아래쪽 원기둥에서는 부호가 $+1$이고 위쪽 원기둥에서는 -1인가?

두 원기둥 사이의 마찰력 S는 위쪽 원기둥을 평면에서 떼어 내는 방향으로 당기고, 아래쪽 원기둥은 평면 쪽으로 누른다. 그래서 평면은 위쪽 원기둥을 덜 세게, 아래쪽 원기둥을 더 세게 누르며, 위쪽 원기둥에는 수직항력에 대한 마찰력의 비가 더 커야 한다.

검산

- 두 원기둥의 방정식을 더하면 계 전체에 대한 식을 얻는다. 평면의 마찰력 합은 경사면 위쪽으로 $(W_1+W_2)\sin\alpha$이고 수직항력의 합은 $(W_1+W_2)\cos\alpha$로, 하나의 강체 덩어리일 때와 정확히 같다.
- $\alpha \to 0$이면 모든 마찰력과 R가 0으로 수렴(converge)하고, μ_1, μ_2에 대한 두 하한도 0으로 수렴하는데, 평평한 바닥에서는 마땅히 그래야 한다.
- 수치로 $W_1 = 3$, $W_2 = 1$, $\alpha = 20^\circ$일 때 여섯 개의 방정식을 직접 풀면 $R \approx 0.342$, $S = F_1 = F_2 \approx 0.684$, $N_1 \approx 2.135$, $N_2 \approx 1.624$이므로 $\mu \geq 2$, $\mu_1 \geq 0.320$, $\mu_2 \geq 0.421$이 되어 공식과 일치한다. W_1, W_2, α를 무작위로 여러 번 골라도 똑같이 일치함을 확인하였다.

흔한 실수

- 모멘트 방정식을 빠뜨리는 것. 모멘트 방정식이 없으면 미지수는 여섯 개인데 방정식은 네 개뿐이어서 문제가 부정(indeterminate)인 것처럼 보인다.

- 두 원기둥 사이의 마찰력 방향을 잘못 잡는 것. 그러면 마지막 두 답에서 ± 1의 부호가 뒤바뀐다.
- 가벼운 원기둥이 아래쪽에 있어야 한다는 점을 놓치는 것. 위쪽 원기둥이 더 가볍다면 R가 음수여야 한다.

STEP 너머

이 계는 정정계(statically determinate system)이다. 평형 방정식이 모든 힘을 결정하므로 마찰 법칙은 확인 가능한 조건이 된다. 접촉이 방정식보다 많으면(예를 들어 거친 바닥 위에서 거친 벽에 기대 놓은 사다리) 계는 부정정(statically indeterminate)이 되어, 강체 정역학만으로는 힘이 어떻게 나뉘는지 알 수 없다. 이때 공학자들은 물체의 탄성(elasticity)을 고려한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 평형과 토크(torque)를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.