풀이

STEP III 1996, 문제 1

순수수학 • 쌍곡선함수의 거듭제곱

> **STEP III 1996, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q1

핵심 아이디어

모든 것은 쌍곡선함수(hyperbolic function)를 지수함수(exponential)로 나타내는 데서 나온다. 거듭제곱 $\cosh^n x$는 $2^{-n}(e^x + e^{-x})^n$이 되고, 이항정리(binomial theorem)로 이를 전개하면 지수함수 $e^{(n-2r)x}$들이 나온다. 이들은 $e^{\pm jx}$처럼 짝을 이루어 나타나며, 각 짝은 하나의 $\cosh jx$가 된다. $\sinh^{2m} x$를 같은 방법으로 전개하면 부호가 번갈아 바뀐다는 점만 다르므로, 두 전개를 더하거나 빼면 항이 하나씩 걸러 사라진다.

풀이

정의와 두 항등식

다음과 같이 정의한다.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

여기서 곧바로 두 가지 사실을 얻는다. $\cosh x + \sinh x = e^x$이고 $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$이므로

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = 1.$$

정의를 제곱하면 $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$이고 $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$이므로

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh 2x,$$

이고, 여기에 항등식(identity) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$을 더하거나 빼면

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \qquad \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

마지막 두 식은 어떤 인수에 대해서도 성립하므로, 이 식에서 x를 $2x$로 바꾸어도 된다.

이제 제곱의 차(difference of squares)를 인수분해하면

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cosh^2 x + \sinh^2 x) = 1 \cdot \cosh 2x = \cosh 2x,$$

이므로 원하는 식을 얻는다. 합에 대해서는 완전제곱식(completing the square)을 만들고 $\cosh x \sinh x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}\sinh 2x$를 이용한다.

$$\begin{aligned}\cosh^4 x + \sinh^4 x &= (\cosh^2 x + \sinh^2 x)^2 - 2\cosh^2 x \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 2x - \tfrac{1}{2}\sinh^2 2x \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh 4x + 1) - \tfrac{1}{4}(\cosh 4x - 1) \\ &= \tfrac{1}{4}\cosh 4x + \tfrac{3}{4},\end{aligned}$$

이것이 두 번째 항등식이다.

계수 a_k

이항정리에 의해

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^n}\left(e^x + e^{-x}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}e^{(n-2r)x}.$$

첨자가 r인 항과 첨자가 $n-r$인 항을 짝짓는다. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$이므로 두 항은 계수가 같고, 지수는 $\pm(n-2r)x$로 부호만 반대이다. 따라서 두 항을 합치면 $2\binom{n}{r}\cosh((n-2r)x)$가 된다.

> **생각해 보기** 실제로 나타나는 $\cosh kx$는 어떤 것들이며, 가운데 항은 어떻게 되는가?

지수 $n-2r$는 $n, n-2, n-4, \ldots$이므로 n과 홀짝성(parity)이 같은 k만 나타난다. $k = n-2r$로 놓으면, $1 \le k \le n$일 때 $\cosh kx$의 계수는 $r = \frac{1}{2}(n-k)$에 대하여 $2 \cdot 2^{-n}\binom{n}{r}$이다. n이 짝수이면 짝이 없는 가운데 항 $r = \frac{n}{2}$가 하나 더 있고, 이 항은 상수 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$를 준다. 따라서

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\dbinom{n}{\frac{1}{2}(n-k)} & \text{조건: } 1 \le k \le n\text{이고} n-k\text{가 짝수,} \\ 0 & \text{조건: } n-k\text{가 홀수,}\end{cases} \qquad a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{1}{2}n} & n\text{이 짝수,} \\ 0 & n\text{이 홀수.}\end{cases}$$

예를 들어 $\cosh^5 x = \frac{5}{8}\cosh x + \frac{5}{16}\cosh 3x + \frac{1}{16}\cosh 5x$이다.

마지막 부분

$n = 2m$으로 놓고 $\sinh^{2m} x$를 같은 방법으로 전개한다.

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}e^{(2m-2r)x}.$$

$(-1)^{2m-r} = (-1)^r$이므로 항 r과 $2m-r$는 여전히 짝을 이루고, 따라서

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} \cosh(2(m-r)x),$$

이다. 이것은 $\cosh^{2m} x$의 전개(cosh가 우함수임을 이용하여 같은 방식으로 쓴 것)에서 부호만 번갈아 바뀐 것이다. 두 식을 빼고 더하면

$$\cosh^{2m} x \mp \sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (1 \mp (-1)^r) \binom{2m}{r} \cosh(2(m-r)x).$$

따라서 차에는 홀수 r인 항만 (각각 두 배가 되어) 남고, 합에는 짝수 r인 항만 남는다. 앞에서처럼 r, $2m-r$ 짝을 모으고 $k = 2j = 2(m-r)$로 놓으면 다음을 얻는다.

$$\cosh^{2m} x - \sinh^{2m} x = b_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 홀수}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

$$\cosh^{2m} x + \sinh^{2m} x = c_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 짝수}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

여기서 상수항은 짝이 없는 가운데 항 $r = m$에서 나오며, 이 항은 m이 홀수일 때는 차에, m이 짝수일 때는 합에 남는다.

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m\text{이 홀수}, \\ 0 & m\text{이 짝수}, \end{cases} \qquad c_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m\text{이 짝수}, \\ 0 & m\text{이 홀수}. \end{cases}$$

말로 정리하면 다음과 같다. 홀수 k에 대하여 $\cosh kx$의 계수는 0이다. 짝수 $k = 2j \ge 2$에 대해서는 $m-j$가 홀수이면 차에서, $m-j$가 짝수이면 합에서 계수가 $2^{2-2m}\binom{2m}{m-j}$이고, 그 밖의 경우에는 0이다. $m = 2$이면 차는 $\frac{1}{4}\binom{4}{1}\cosh 2x = \cosh 2x$이고 합은 $\frac{1}{8}\binom{4}{2} + \frac{1}{4}\binom{4}{0}\cosh 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cosh 4x$이므로, 처음에 증명한 항등식들을 다시 얻는다.

검산

$x = 0$을 대입하면 모든 $\cosh kx$가 1이 되므로 a_k의 합은 1이어야 한다(실제로 그렇다. 이항계수(binomial coefficient)의 합은 2^n이다). 마지막 두 전개의 계수 합도 각각 1이어야 한다. $m = 3$이면 공식에서 $\cosh^6 x - \sinh^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cosh 4x$와 $\cosh^6 x + \sinh^6 x = \frac{15}{16}\cosh 2x + \frac{1}{16}\cosh 6x$를 얻는다. $x = 1$에서 첫 번째 식의 양변은 유효숫자 네 자리까지 모두 10.87이며, 계산기로 확인할 수 있다. 우리는 $n \le 12$와 $m \le 8$에 대하여 임의의 x 값에서 모든 공식을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 가운데 항을 두 배로 세는 것: n이 짝수일 때 $r = \frac{n}{2}$인 항은 짝이 없으므로 a_0는 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$이지, 그 두 배가 아니다.
- k와 n의 홀짝성이 다르면 언제나 $a_k = 0$이라는 사실을 잊는 것.
- 마지막 부분에서 상수항이 항상 있다고 가정하는 것. 상수항은 m이 홀수일 때만 차에, m이 짝수일 때만 합에 나타난다.

STEP 너머

$\cosh x$(또는 $\cos x$)의 거듭제곱을 $\cosh kx$들의 일차결합으로 나타내는 것은 푸리에 해석(Fourier analysis)의 첫 맛보기이다. e^{ikx}가 자연스러운 기본 단위이며, $\cos^n x$는 계수가 이항계수인 유한 푸리에 급수(Fourier series)이다. 이 과정을 거꾸로 하여 $\cos nx$를 $\cos x$에 대한 다항식으로 나타내면 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomials)을 얻는데, 이는 근사 이론(approximation theory)에서 중요하다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 지수함수 꼴이 왜 이 모든 항등식을 자연스럽게 만드는지 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.