풀이

STEP II 1996, 문제 9

역학 • 안정성과 질량중심

> **STEP II 1996, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q9

핵심 아이디어

모든 것은 장난감의 무게중심(centre of mass) G가 대칭축(axis of symmetry) 위의 어디에 있느냐에 달려 있다. 반구로 놓여 있을 때 탁자는 항상 반구의 평평한 면의 중심 O 바로 아래에서 장난감과 닿으므로, G가 O보다 아래에 있는지 위에 있는지에 따라 "다시 일어서는지" "넘어지는지"가 결정된다. 원뿔로 놓여 있을 때 장난감은 모선(generator) 하나 전체를 따라 탁자에 닿으며, G를 지나는 연직선이 그 접촉선과 만나기만 하면 그대로 머물러 있다.

풀이

장난감을 축에 대하여 대칭이고 밀도가 ρ인 균일한 강체(rigid body)로 모형화한다. 공통 원형 면의 중심을 O라 하고, 축을 따라 O로부터의 거리를 재되 원뿔의 꼭짓점 V 쪽을 양의 방향으로 한다.

무게중심

원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi a^2(\lambda a) = \frac{1}{3}\lambda\pi a^3$이고 그 무게중심은 $+\frac{1}{4}\lambda a$에 있다. 반구의 부피는 $\frac{2}{3}\pi a^3$이고 그 무게중심은 $-\frac{3}{8}a$에 있다. 따라서 G의 위치는

$$h = \frac{\frac{1}{3}\lambda\cdot\frac{1}{4}\lambda a - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}a}{\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{12}\lambda^2 a - \frac{1}{4}a}{\frac{1}{3}(\lambda+2)} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}.$$

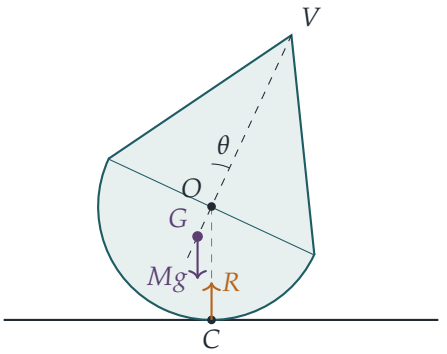
이다. 그러므로 $\lambda < \sqrt{3}$이면 G는 O보다 아래에, $\lambda = \sqrt{3}$이면 O에, $\lambda > \sqrt{3}$이면 O보다 위에 있다.

반구로 놓여 있을 때

축이 위쪽 연직 방향과 각 θ $(0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi)$를 이루도록 기울어져 있어서 반구의 곡면이 탁자 위에 있다고 하자.

? **생각해 보기** 반구는 정확히 어디에서 탁자와 닿는가?

탁자는 반구를 일부로 하는 구에 접하고, 접평면(tangent plane)은 접점에서 반지름과 수직이다. 따라서 접점 C는 θ가 무엇이든 항상 O의 **바로 아래**에 있고, O는 항상 높이 a에 있다.



(그림은 G가 O보다 아래에 있는 경우, 즉 $\lambda < \sqrt{3}$인 경우를 나타낸다.)

C에 대한 모멘트(moment)를 생각한다. 수직항력과 마찰력은 모두 C에 작용하므로, 모멘트를 갖는 것은 G에 작용하는 무게 Mg뿐이다. C로부터(즉 O를 지나는 연직선으로부터) G까지의 수평 변위는 $h\sin\theta$이며, 꼭짓점이 기울어진 쪽을 양으로 잰다.

- $\lambda < \sqrt{3}$이면 $h < 0$이다. $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$인 모든 θ에 대하여 G는 C를 지나는 연직선에 대해 꼭짓점과 반대쪽에 있다. 따라서 무게는 장난감을 $\theta = 0$ 쪽으로 되돌린다. 같은 말이지만, G의 높이는 $a + h\cos\theta = a - |h|\cos\theta$이고 이는 $\theta = 0$일 때 최소이므로, 똑바로 선 자세가 위치 에너지(potential energy)가 가장 작은 자세이다. 어느 쪽으로 보든, 반구 위의 어디에 놓더라도 장난감은 똑바로 선 자세로 움직인다(그 자세를 중심으로 흔들리다가 마찰과 공기 저항 때문에 결국 그 자세에 멈춘다).
- $\lambda > \sqrt{3}$이면 $h > 0$이다. 기울기 $\theta > 0$이 얼마이든 G는 꼭짓점과 같은 쪽에 있고, 무게는 장난감을 똑바로 선 자세에서 **더** 멀어지게 한다. 이제 G의 높이 $a + h\cos\theta$는 $\theta = 0$에서 최대이므로, 똑바로 선 자세는 불안정한 평형(unstable equilibrium)이다. 아주 조금만 기울어져도 기울기가 커져서 가장자리가 탁자에 닿고 장난감은 원뿔면 쪽으로 넘어진다. 즉 균형을 잃고 쓰러진다.

($\lambda = \sqrt{3}$일 때는 $G = O$이므로 장난감은 어떤 기울기에서도 중립 평형(neutral equilibrium)에 있다.) 이것이 증명하려던 결과이다.

원뿔로 놓여 있을 때

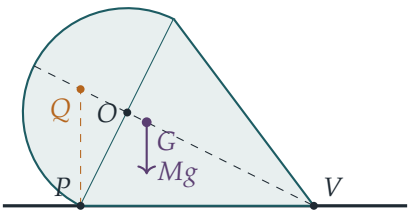
이제 장난감이 원뿔의 모선 VP를 탁자에 대고 누워 있다고 하자. 여기서 P는 가장자리 위의 점이다. 축과 VP를 지나는 평면에서 생각한다. 이 평면에 O를 원점으로 하고 $V=(0,\lambda a)$, $P=(a,0)$이 되도록 좌표축을 잡으면, 반구는 $y<0$인 쪽에 있다. VP를 따라 원뿔에 접하는 접평면은 이 평면과 수직이고, 그 자취는 직선

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}=1.$$

이다.

> **생각해 보기** 혹시 반구가 탁자를 뚫고 나와서, 원뿔이 모선을 따라 평평하게 놓일 수 없는 것은 아닐까?

그렇지 않다. 장난감의 모든 점은 이 평면에 정사영하면 원뿔의 삼각형 단면 또는 반원판 $x^2+y^2\le a^2$, $y\le 0$의 점으로 간다. 삼각형 위에서는 $\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le 1$이다. 반원판 위에서는 $x\le a$이고 $y\le 0$이므로 $\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le \frac{x}{a}\le 1$이며, 등호는 P에서만 성립한다. 따라서 장난감 전체는 평면의 한쪽에 있고, 선분 VP를 따라서만 평면과 닿고 다른 곳에서는 닿지 않는다.



(그림은 $\lambda=2$인 경우이다. P에서 VP에 그은 수선은 점선으로 나타냈다.)

반력은 모두 VP를 따라 작용하며 탁자에 수직이다. 따라서 장난감이 탁자 위에서 평형을 이루어 P나 V를 중심으로 넘어가지 않을 필요충분조건은 G를 지나는 연직선이 선분 VP와 만나는 것, 즉 G에서 VP에 내린 수선의 발이 V와 P 사이에 있는 것이다.

V에서 VP에 그은 수선은 축과 V에서만 만난다. P에서 VP에 그은 수선이 축과 만나는 점을 Q라 하자. 삼각형 VPQ에서 P의 각은 직각이고 PO는 빗변 VQ에 내린 높이이므로 $OP^2=OV\cdot OQ$이고, 따라서

$$OQ=\frac{a^2}{\lambda a}=\frac{a}{\lambda}.$$

이다. 즉 Q는 O보다 a/λ만큼 아래에 있다. 축 위의 점이 선분 VP 위로 정사영될 필요충분조건은 그 점이 Q와 V 사이에 있는 것이다. 따라서

$$-\frac{a}{\lambda}<h<\lambda a.$$

이어야 한다. 오른쪽 부등식은 G가 장난감 내부, V보다 아래에 있으므로 성립한다. 왼쪽 부등식은 양변에 $4\lambda(\lambda+2)/a > 0$을 곱하면

$$\frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)} > -\frac{a}{\lambda} \iff \lambda^3 - 3\lambda + 4\lambda + 8 > 0 \iff \lambda^3 + \lambda + 8 > 0,$$

이 되고, 이는 모든 $\lambda > 0$에 대하여 참이다. 따라서 G를 지나는 연직선은 항상 접촉선과 만나고, 장난감은 그 자리에 머문다. 회전 대칭성에 의해 어느 모선이 닿아 있는지도 상관없다. 그러므로 λ의 값이 무엇이든 장난감은 원뿔면으로 놓인 채 그대로 있으며, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $\lambda = \sqrt{3}$에서 공식은 $h = 0$을 준다. 원뿔의 모멘트 $\frac{1}{12}\lambda^2 a$가 반구의 모멘트 $\frac{1}{4}a$와 정확히 균형을 이룬다. 장난감을 얇은 원판으로 잘라 수치적으로 합하면 여러 λ에 대하여 h가 $10^{-5}a$ 이내로 재현된다.
- $\lambda = 1$일 때: $h = -\frac{1}{6}a$, $OQ = a$이고, G에서 내린 수선의 발은 V에서 P까지의 0.583 지점에 있다. $\lambda = 10$일 때는 0.790 지점에 있다. $(0, 50)$에서 λ의 무작위 값 20,000개를 시험했을 때, 수선의 발은 언제나 VP의 내부에 있었다.
- 극한의 경우: $\lambda \to 0$이면 장난감은 거의 반구이며$(h \to -\frac{3}{8}a)$, 반구는 잘 알려진 대로 스스로 다시 일어선다. $\lambda \to \infty$이면 긴 원뿔이 되고, G는 원뿔 자체의 무게중심을 따라 축 위로 올라간다.

흔한 실수

- 실제 접점이 아니라 **똑바로 선** 장난감의 가장 낮은 점에 대한 모멘트를 구하는 것. 실제 접점은 장난감이 구르면서 움직이지만 항상 O의 바로 아래에 있다.
- 마지막 부분에서 반구도 탁자에 닿는다고 가정하는 것. 반원판은 $y \le 0$인 쪽에 있으므로 닿지 않는다.

STEP 너머

이 흔들리는 장난감은 평형의 안정성(stability of equilibrium)을 처음으로 엿보게 해 준다. 일반적으로 평면 위를 구르는 물체는 그 무게중심이 접점에서의 표면의 곡률 중심(centre of curvature)(여기서는 O)보다 아래에 있을 때 안정하다. 같은 생각이 물에 뜬 배의 경심(metacentre)을 지배한다. 대학 1학년 과정에서 이것은 위치 에너지의 극소와 그 주위의 미소 진동(small oscillations)에 대한 공부로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An*

Introduction to Mechanics(역학 입문)는 이러한 관점에서 무게중심과 강체의 평형을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.