풀이

STEP II 1996, 문제 8

순수수학 • 2계 미분방정식

> **STEP II 1996, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q8

핵심 아이디어

이 방정식에는 $f(x)$와 $f(-x)$가 섞여 있으므로, 애초에 f에 대한 보통의 상미분방정식(ordinary differential equation)이 아니다. 요령은 방정식을 두 번, 즉 x에서 한 번, $-x$에서 한 번 적은 다음 더하고 빼는 것이다. 합 g와 차 h는 각각 제대로 된 상수계수 방정식을 만족하므로 여함수(complementary function)와 특수해(particular integral)로 풀 수 있고, f는 $\frac{1}{2}(g+h)$로 되찾는다.

풀이

$g(0)$과 $g'(0)$의 값

$g(x) = f(x) + f(-x)$에 $x = 0$을 대입하면 $g(0) = 2f(0) = 2$이다.

미분하면, 연쇄법칙(chain rule)에 의해 둘째 항에 음의 부호가 붙어

$$g'(x) = f'(x) - f'(-x),$$

이므로 요구한 대로 $g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$이다. ($f'(0)$의 값은 필요하지 않았다는 점에 주목하자. g는 우함수(even function)이므로 그 도함수는 기함수(odd function)이고, 따라서 0에서 값이 0이 된다.)

g에 대한 방정식

한 번 더 미분하면 연쇄법칙에서 나온 두 음의 부호가 상쇄된다.

$$g''(x) = f''(x) + f''(-x).$$

? **생각해 보기** $\mathrm{f}''(-x)$는 무엇인가? 주어진 방정식은 $\mathrm{f}''(x)$에 대해서만 알려 준다.

주어진 방정식은 모든 x에 대해 성립하므로 x를 모두 $-x$로 바꾸어도 된다. cos는 우함수이므로 다음을 얻는다.

$$\mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(x) = -x + 3\cos 2x.$$

이것을 원래 방정식에 더하면

$$\mathrm{f}''(x) + \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) + \mathrm{f}(x) = 6\cos 2x, \qquad \text{즉,} \qquad \mathrm{g}''(x) + \mathrm{g}(x) = 6\cos 2x,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

g 구하기

특성방정식(auxiliary equation) $m^2 + 1 = 0$의 근은 $\pm\mathrm{i}$이므로 여함수는 $A\cos x + B\sin x$이다. 특수해로 $\mathrm{g} = k\cos 2x$를 시도하면 $\mathrm{g}'' + \mathrm{g} = -4k\cos 2x + k\cos 2x = -3k\cos 2x$이므로 $k = -2$이다. 따라서

$$\mathrm{g}(x) = A\cos x + B\sin x - 2\cos 2x.$$

이제 $\mathrm{g}(0) = A - 2 = 2$에서 $A = 4$이고, $\mathrm{g}'(0) = B = 0$이다. 그러므로

$$\mathrm{g}(x) = 4\cos x - 2\cos 2x.$$

h 구하기

$\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)$에 대해

$$\mathrm{h}(0) = 0, \qquad \mathrm{h}'(x) = \mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}'(-x), \quad \text{따라서} \quad \mathrm{h}'(0) = 2\mathrm{f}'(0) = -2,$$

이고 $\mathrm{h}''(x) = \mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x)$이다. 이번에는 x에서의 방정식에서 $-x$에서의 방정식을 뺀다.

$$\mathrm{f}''(x) - \mathrm{f}''(-x) + \mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x) = 2x, \qquad \text{즉,} \qquad \mathrm{h}''(x) - \mathrm{h}(x) = 2x.$$

? **생각해 보기** h 앞의 부호가 왜 $+$에서 $-$로 바뀌었는가?

뺄셈에서 f 항들은 $\mathrm{f}(-x) - \mathrm{f}(x)$의 꼴로 나타나는데, 이는 $+\mathrm{h}(x)$가 아니라 $-\mathrm{h}(x)$이다. 그래서 이번에는 해가 삼각함수가 아니라 지수함수가 된다. 특성방정식 $m^2 - 1 = 0$에서 여함수 $C\mathrm{e}^{x} + D\mathrm{e}^{-x}$를 얻는다. 특수해로 $\mathrm{h} = px + q$를 시도하면 $-(px + q) = 2x$이므로 $p = -2, q = 0$이다. 따라서

$$\mathrm{h}(x) = C\mathrm{e}^{x} + D\mathrm{e}^{-x} - 2x.$$

조건에서 $\mathrm{h}(0) = C + D = 0$이고 $\mathrm{h}'(0) = C - D - 2 = -2$이므로 $C = D = 0$이고

$$\mathrm{h}(x) = -2x.$$

f 되찾기

g와 h의 정의를 더하면 $\mathrm{g}+\mathrm{h}=2\mathrm{f}$이므로

$$\mathrm{f}(x)=\tfrac{1}{2}(\mathrm{g}(x)+\mathrm{h}(x))=\tfrac{1}{2}(4\cos x-2\cos 2x-2x)=2\cos x-\cos 2x-x,$$

이고, 이것이 요구한 결과이다.

검산

- $\mathrm{f}(0)=2-1-0=1$이고 $\mathrm{f}'(x)=-2\sin x+2\sin 2x-1$이므로 $\mathrm{f}'(0)=-1$이다.
- 다시 대입하기: $\mathrm{f}''(x)=-2\cos x+4\cos 2x$이고 $\mathrm{f}(-x)=2\cos x-\cos 2x+x$이며, 둘을 더하면 $x+3\cos 2x$가 된다.
- 홀짝성이 맞다: 마땅히 그래야 하듯이 g는 우함수, h는 기함수로 나왔다.
- $\mathrm{f}(x),\mathrm{f}(-x)$ 쌍을 $x=0$에서 $x=3$까지 수치적으로 단계별 계산하면 $\mathrm{f}(3)\approx -5.940155$를 얻으며, 이는 $2\cos 3-\cos 6-3$과 일치한다.

흔한 실수

- 연쇄법칙의 부호를 잊는 것: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}'(-x)$이지만 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{f}(-x)=+\mathrm{f}''(-x)$이다.
- 방정식의 한쪽 변에서만 x를 $-x$로 바꾸는 것: 우변의 x도 $-x$가 된다.
- $\mathrm{h}''+\mathrm{h}=2x$를 얻어서 h에 삼각함수 항이 생기는 것.

STEP 너머

이것은 함수 미분방정식(functional differential equation)으로, 미지의 함수를 두 개 이상의 점에서 계산한 값이 등장한다. 우함수 부분과 기함수 부분으로 나누는 방법이 통하는 까닭은 반사 $x\mapsto -x$가 제곱하면 항등 사상이 되는 선형 사상(linear map)이기 때문이다. 따라서 그 고윳값(eigenvalue)은 ± 1이고, 모든 함수는 우함수 부분(고윳값 1)과 기함수 부분(고윳값 -1)으로 유일하게 분해된다. 각 부분에서 방정식은 보통의 상미분방정식이 된다. 대칭성에 따라 분해한다는 이 생각은 선형대수학과 푸리에 해석(Fourier analysis) 전반에 걸쳐 나타난다. 상수계수 방정식 자체에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를, 선형대수학의 관점에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.