풀이

STEP II 1996, 문제 7

순수수학 • 좌표기하에서의 자취

> **STEP II 1996, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q7

핵심 아이디어

정사각형이 두 좌표축 모두에 대하여 대칭(symmetric)이 되도록 좌표(coordinates)를 잡는다. 그러면 각 거리는 일차식의 절댓값(modulus)이 되고, 두 곱 pr와 qs는 각각 $|y^2 - a^2|$와 $|x^2 - a^2|$가 된다. $|U| = |V|$ 꼴의 방정식은 $U = V$ 또는 $U = -V$로 나뉜다. 한 경우에서는 두 직선이, 다른 경우에서는 원이 나온다.

풀이

정사각형의 한 변의 길이를 $2a$ $(a > 0)$라 하고, 중심이 원점에 있으며 변들이 좌표축에 평행하도록 놓는다.

$$A = (-a, -a), \quad B = (a, -a), \quad C = (a, a), \quad D = (-a, a).$$

그러면 AB는 직선 $y = -a$ 위에, BC는 $x = a$ 위에, CD는 $y = a$ 위에, DA는 $x = -a$ 위에 있다. 점 $P = (x, y)$에서 수평선 $y = c$까지의 수직 거리(perpendicular distance)는 $|y - c|$이고, 수직선 $x = c$까지의 거리는 $|x - c|$이다. 따라서

$$p = |y + a|, \qquad q = |x - a|, \qquad r = |y - a|, \qquad s = |x + a|.$$

이 식들은 정사각형의 안쪽이든 바깥쪽이든 평면 위의 모든 점 P에 대하여 성립한다. 거리가 음이 아니게 만드는 것은 바로 절댓값이므로, 절댓값을 함부로 없애서는 안 된다.

두 개씩 짝지어 곱하고 $|u|\,|v| = |uv|$를 이용하면

$$pr = |(y + a)(y - a)| = |y^2 - a^2|, \qquad qs = |(x - a)(x + a)| = |x^2 - a^2|.$$

생각해 보기 여러 영역으로 나누지 않고 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$에서 절댓값을 어떻게 없앨 수 있을까?

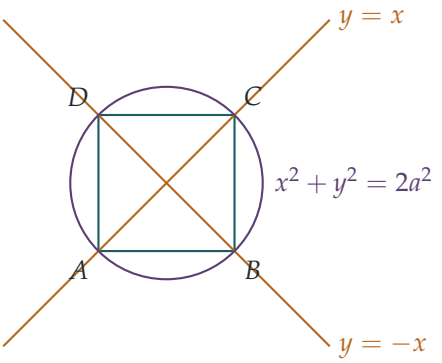
실수에 대하여 $|U| = |V|$가 성립할 필요충분조건(if and only if)은 $U = V$ 또는 $U = -V$인 것이다. 양변이 모두 음이 아니므로 $|U| = |V| \iff U^2 = V^2 \iff (U - V)(U + V) = 0$이기 때문이다. 필요충분인 단계만 사용하므로 필요조건과 충분조건을 동시에 얻는다. 따라서 $pr = qs$가 성립할 필요충분조건은

$$y^2 - a^2 = x^2 - a^2 \qquad \text{또는} \qquad y^2 - a^2 = -(x^2 - a^2).$$

첫째 경우. $y^2 = x^2$, 즉 $(y - x)(y + x) = 0$이므로 $y = x$ 또는 $y = -x$이다. 이것은 정사각형의 중심을 지나고 대각선 AC와 BD를 포함하는 두 (무한) 직선이다.

둘째 경우. $x^2 + y^2 = 2a^2$. 이것은 정사각형의 중심을 중심으로 하고 반지름이 대각선 길이의 절반인 $\sqrt{2}a$인 원이다. 따라서 이 원은 A, B, C, D를 지나는 정사각형의 외접원(circumcircle)이다.

그러므로 $pr = qs$이면 P는 두 대각선 직선 AC, BD (한없이 연장한 것) 중 하나 위에 있거나 $ABCD$의 외접원 위에 있어야 한다. 역으로(conversely), 위의 모든 단계는 거꾸로 되짚을 수 있다. P가 두 직선 중 하나 위에 있으면 $x^2 = y^2$이므로 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$이다. P가 원 위에 있으면 $y^2 - a^2 = a^2 - x^2$이고, 이 역시 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$를 준다. 어느 경우든 $pr = qs$이므로, 두 직선과 원 위의 모든 점은 P가 놓일 수 있는 위치이다. 이로써 증명이 끝난다.



생각해 보기 정사각형 바깥의 점도 정말 허용되는가? 그리고 직선은 꼭짓점에서 끝나는가?

문제는 평면 위의 어떤 점이든 허용하며, 우리의 거리 공식은 모든 곳에서 성립한다. 따라서 자취(locus)는 선분으로서의 대각선만이 아니라 각 직선 전체이다. 예를 들어 $P = (3a, 3a)$에서는 $p = 4a$, $r = 2a$, $q = 2a$, $s = 4a$이므로 $pr = qs = 8a^2$이다.

검산

- 중심 $(0,0)$은 두 직선 위에 모두 있다. $p=q=r=s=a$이므로 $pr=qs$이다.
- AB의 중점 바로 아래에 있는 원 위의 점, 즉 $(0,-\sqrt{2}\,a)$를 잡는다. 그러면 $p=(\sqrt{2}-1)a$, $r=(\sqrt{2}+1)a$이므로 $pr=a^2$이고, $q=s=a$이므로 $qs=a^2$이다.
- $(\frac{1}{2}a,0)$처럼 자취 위에 있지 않은 점은 $pr=a^2$이지만 $qs=\frac{3}{4}a^2$이므로 조건을 만족하지 않는다.
- 수치적으로 ($a=1.7$로 두고) 세 곡선 위의 무작위 점 30 000개에서 $pr=qs$가 10^{-9} 이내로 성립했다. $[-5,5]^2$ 위의 600×600 격자에서 $pr-qs$의 부호 변화를 조사한 결과, 두 직선과 원을 벗어난 곳에서는 영점이 발견되지 않았다.

흔한 실수

- 절댓값을 빼고 $pr=a^2-y^2$, $qs=a^2-x^2$로 쓰는 것. 이는 정사각형 안쪽에서만 맞고 원을 놓치게 되어 $y=\pm x$만 얻는다.
- P가 곡선 위에 있어야 한다는 것만 증명하는 것. 문제는 역도 묻고 있으므로, 직선과 원 위의 모든 점이 왜 조건을 만족하는지 밝혀야 한다.
- 직선을 대각선 **선분** AC와 BD로 서술하는 것. 이들은 직선 전체이다.

STEP 너머

이 자취는 다항식(polynomial) $(y^2-a^2)^2-(x^2-a^2)^2$의 영점 집합(zero set)이며, 이 다항식은 $(y-x)(y+x)(x^2+y^2-2a^2)$로 인수분해(factorisation)된다. 이처럼 다항식 방정식으로 주어진 곡선이 더 단순한 조각들로 나뉘는 것은 가약(reducible) **대수 곡선**(algebraic curve)의 첫 번째 예이다. 도형의 대칭에 맞추어 좌표를 고르는 습관이 이런 인수분해를 눈에 보이게 해 준다. 이런 방식의 기하를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를, 곡선의 대수학에 대해서는 Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.