풀이

STEP II 1996, 문제 6

순수수학 • 약수의 개수 세기

> **STEP II 1996, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q6

핵심 아이디어

N의 모든 약수(factor)는 각 소수(prime) p_i마다 몇 번 곱할지를 0부터 m_i까지 중에서 독립적으로 골라서 만들어진다. 이 선택의 가짓수를 세면 모든 약수의 개수가 나오고, 그다음 1과 N을 버린다. 그러고 나면 두 탐색 문제는 모두 지수(exponent)에 관한 문제가 된다. 어떤 지수 패턴이 올바른 개수를 주는지, 그리고 그 지수들을 소수에 어떻게 배치해야 N이 가장 작아지는지를 따지면 된다.

풀이

첫 예시

12의 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 12$이다. 1과 12를 빼면 $2, 3, 4, 6$이 남으므로 진약수(proper factor)는 4개이다. 16의 약수는 $1, 2, 4, 8, 16$이다. 1과 16을 빼면 $2, 4, 8$이 남으므로 진약수는 3개이다.

일반적인 개수 공식

M이 N을 나눈다고 하자. 그러면 M의 모든 소인수(prime factor)는 N의 소인수이고, 그 소인수는 M에 N보다 더 많이 나타날 수 없다. 따라서

$$M = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \qquad 0 \le a_i \le m_i.$$

역으로, 이런 꼴의 곱은 모두 N을 나눈다. 소인수분해의 유일성(uniqueness of prime factorisation)에 의해 $(a_1, \ldots, a_r)$을 다르게 고르면 서로 다른 정수 M이 나온다. 따라서 N의 약수는 이 선택들과 정확히 일대일로 대응한다. 각 a_i마다 $m_i + 1$가지 선택이 있고 이

를 독립적으로 고르므로, N의 약수는 모두

$$d(N) = (m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1)$$

개이다. $r \geq 1$이므로 $N > 1$이고, 따라서 1과 N은 **서로 다른** 두 약수이다. 이 둘을 빼면 진약수의 개수는 다음과 같다.

$$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1) - 2.$$

확인: $12 = 2^2 \cdot 3$이면 $3 \cdot 2 - 2 = 4$이고, $16 = 2^4$이면 $5 - 2 = 3$이다.

N을 작게 만드는 원리

두 소문항 모두에서 지수를 고정하고, 그 지수로 만들 수 있는 가장 작은 N을 묻는다. 두 가지 관찰로 이 문제가 해결된다.

- 가장 작은 소수들을 쓴다. 어떤 소수 q는 쓰면서 그보다 작은 소수 p는 쓰지 않았다면, q를 p로 바꾸어도 모든 지수가 그대로이므로 개수는 변하지 않고 N은 더 작아진다. 따라서 소수는 빠짐없이 $2, 3, 5, \ldots$ 이어야 한다.
- 가장 큰 지수를 가장 작은 소수에 준다. $p < q$이고 p의 지수가 a, q의 지수가 b이며 $a < b$라고 하자. 두 지수를 맞바꾸면 N에 $p^{b-a}/q^{b-a} < 1$이 곱해지고, 개수는 변하지 않는다.

따라서 지수 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$에 대하여 가장 작은 N은 $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3}\cdots$이다.

소문항 (i)

진약수가 정확히 12개여야 하므로 $d(N) = 14$이다. 각 인수 $m_i + 1$은 적어도 2이고, $14 = 2 \cdot 7$이며 7은 소수이다. 따라서 14를 각각 2 이상인 인수들의 곱으로 나타내는 방법은 두 가지뿐이다.

- 14 자체: $N = p^{13}$이고, 가장 작은 값은 $2^{13} = 8192$이다.
- 7×2: $N = p^6 q$이고, 가장 작은 값은 $2^6 \cdot 3 = 192$이다.

따라서 진약수가 정확히 12개인 가장 작은 양의 정수는 다음과 같다.

$$\boxed{192 = 2^6 \cdot 3}.$$

이 수의 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192$이고, 모두 14개이다.

소문항 (ii)

이제는 $d(N) \geq 14$이면 된다. $d(N)$이 더 이상 고정되어 있지 않으므로, 서로 다른 소수의 개수 r에 따라 경우를 나눈다. 지수를 내림차순으로 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots$와 같이 쓴다.

? 생각해 보기 왜 (i)을 그대로 이용해 $d(N) = 14$인 경우만 보면 안 될까?

약수가 **더 많다고** 해서 N이 반드시 더 커야 하는 것은 아니기 때문이다. 지수를 여러 작은 소수에 나누어 주면 적은 비용으로 많은 약수를 얻을 수 있다. 예를 들어 $2^3 \cdot 3 \cdot 5$는 약수가 $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$개이면서 192보다 훨씬 작다. 따라서 $d(N) \geq 14$인 모든 값을 살펴보아야 한다.

- $r \geq 4$: 이때 $N \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$이다.
- $r = 3$: 이때 $d(N) = (e_1+1)(e_2+1)(e_3+1) \geq 14$이다. $e_2 = e_3 = 1$이면 $4(e_1+1) \geq 14$이어야 하므로 $e_1 \geq 3$이고 $N \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$이다. 그렇지 않으면 $e_2 \geq 2$이므로 $e_1 \geq 2$이기도 하고, $N \geq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$이다.
- $r = 2$: 이때 $e_1 \geq e_2$이고 $(e_1+1)(e_2+1) \geq 14$이다. $e_2 = 1$이면 $e_1 \geq 6$이고 $N \geq 2^6 \cdot 3 = 192$이다. $e_2 = 2$이면 $3(e_1+1) \geq 14$에서 $e_1 \geq 4$이므로 $N \geq 2^4 \cdot 3^2 = 144$이다. $e_2 \geq 3$이면 $e_1 \geq 3$이고 $N \geq 2^3 \cdot 3^3 = 216$이다.
- $r = 1$: $e_1 + 1 \geq 14$이므로 $N \geq 2^{13} = 8192$이다.

모든 경우에 $N \geq 120$이고, 실제로 $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$가 조건을 만족한다. 이 수의 진약수는 $4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 14$개이기 때문이다. 따라서 진약수가 적어도 12개인 가장 작은 양의 정수는

$$\boxed{120},$$

이고, 이 수는 실제로 진약수가 14개이다.

검산

2부터 9000까지의 모든 N에 대해 진약수의 개수를 일일이 세어 보면(brute-force) 공식 $d(N) - 2$와 일치한다. 또한 진약수가 정확히 12개인 첫 번째 N이 192이고, 진약수가 적어도 12개인 첫 번째 수가 120이라는 것(진약수는 14개이다)도 확인된다. 손으로 빠르게 확인하려면 120 바로 아래에서 약수가 많은 수들을 보면 된다. 즉 $60, 72, 84, 90, 96$과 108은 모두 약수가 12개이므로 진약수는 10개뿐이다.

흔한 실수

- 14가 아니라 $d(N) = 12$로 놓는 실수. 1과 N은 제외된다는 것을 기억하자.
- 소문항 (ii)에서도 192라고 답하는 실수. 진약수가 적어도 12개인 가장 작은 N의 진약수가 정확히 12개일 필요는 없다.
- 큰 지수를 큰 소수에 주는 실수: $2 \cdot 3^6$은 $2^6 \cdot 3$과 개수는 같지만 훨씬 크다.

STEP 너머

약수 함수(divisor function) $d(N)$은 **곱셈적**(*multiplicative*)이다. 즉 a와 b가 서로소(coprime)이면 언제나 $d(ab) = d(a)d(b)$이다. 곱 공식이 표현하는 것이 바로 이것이다. 자신보다 작은 모든 수보다 약수가 많은 수를 **고도 합성수**(*highly composite number*)라고 하며, 라마누잔(Ramanujan)이 이를 깊이 연구했다. 120도 그중 하나이며, 여기서 쓴 지수 배열 논증이 그의 분석의 출발점이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*은 약수 함수와 유일 인수분해를 다루는 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.