풀이

STEP II 1996, 문제 5

순수수학 • 1의 거듭제곱근

> **STEP II 1996, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q5

핵심 아이디어

이 4차식(quartic)은 **회문 다항식**(*palindromic polynomial*)이다. 즉 계수를 앞에서 읽으나 뒤에서 읽으나 같다. z^2으로 나누면 항들이 z^2+z^{-2}와 $z+z^{-1}$로 묶이고, 둘 다 $u=z+z^{-1}$로 나타낼 수 있으므로 z에 대한 4차식이 u에 대한 2차식(quadratic)으로 줄어든다. 후반부에서는 이 4차식이 z^5-1에서 $z-1$을 인수로 빼낸 뒤 남는 인수임을 알아차린다. 따라서 그 근은 1의 5제곱근(fifth roots of unity)이다. 같은 네 수에 대한 두 가지 표현을 비교하면 삼각함수(trigonometric functions)의 정확한 값을 얻는다.

풀이

u의 값

$z=0$은 $(*)$를 만족하지 않으므로 z^2으로 나눌 수 있다.

$$z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0.$$

이제 $u^2=(z+z^{-1})^2=z^2+2+z^{-2}$이므로 $z^2+z^{-2}=u^2-2$이다. 방정식은

$$u^2-2+u+1=0, \qquad \text{즉} \qquad u^2+u-1=0,$$

이 되고, 따라서

$$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{또는} \quad u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

z의 값

$z + z^{-1} = u$로부터 $z^2 - uz + 1 = 0$을 얻으므로

$$z = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2}.$$

$u^2 = 1 - u$를 이용하면 판별식(discriminant)은 $u^2 - 4 = -3 - u$이고, 이는 두 u 값 모두에 대해 음수이다(각 경우 $|u| < 2$이므로). 따라서 근은 실수가 아니다.

$$z = \frac{u \pm i\sqrt{3 + u}}{2}.$$

$u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$이면 $3 + u = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$이고, $u = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$이면 $3 + u = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$이다. $\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$로 쓰면 $(*)$의 네 해는

$$z = \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{그리고} \qquad z = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

각 u 값은 두 개의 z 값(한 쌍 z, z^{-1}로, 여기서는 서로 켤레복소수(complex conjugates)이다)을 주고, 4차식의 근은 정확히 네 개이므로 이것이 모든 근이다.

$z^5 = 1$과의 연결

전개하면

$$(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1,$$

인데, 가운데 항들이 연쇄적으로 소거(telescope)되기 때문이다. 따라서 z가 $(*)$를 만족하면 둘째 인수가 0이 되어 $z^5 - 1 = 0$이다.

$z^5 = 1$의 해는 $k = 0, 1, 2, 3, 4$에 대하여 $z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$이다. $k = 0$이면 $z = 1$인데, 이는 $(*)$를 만족하지 **않는다**(좌변이 5이다). 나머지 네 개는 서로 다르며 모두 $(*)$를 만족한다. 이들에 대해서는 $z - 1 \neq 0$이므로 인수 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$이 0이 되어야 하기 때문이다. 따라서 $(*)$의 해는

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad r = 1, \quad \theta = \pm\frac{2\pi}{5}, \pm\frac{4\pi}{5}.$$

결론 끌어내기

이제 같은 네 수에 대한 두 가지 표현이 있으므로, 이들을 서로 짝지어야 한다.

? **생각해 보기** 네 개의 무리식(surd) 표현 가운데 어느 것이 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$인가?

부호를 살펴보자. $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$이므로 수 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$는 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)가 모두 양수이다. 무리식 표현들의 실수부는 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$과 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} <$

0이므로, 그중 정확히 하나만 제1사분면(first quadrant)에 있다.

$$\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

($(0,\pi)$에 있는 다른 각인 $\frac{4\pi}{5}$는 코사인이 음수이므로, 허수부가 양수인 다른 근과 짝지어진다.) 실수부와 허수부를 각각 비교하면

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\qquad\text{그리고}\qquad\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

를 얻어 증명이 끝난다. 덤으로 $\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, $\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$도 얻는다.

검산

- $\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ\approx 0.30902$이고 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\approx 0.30902$이다. $\sin 72^\circ\approx 0.95106$이고 $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\approx 0.95106$이다.
- 네 근의 합은 -1(z^3의 계수에 마이너스를 붙인 값)이어야 한다. 실수부를 더하면 $\frac{2(-1+\sqrt{5})+2(-1-\sqrt{5})}{4}=-1$이다. 같은 말이지만, 두 u 값의 합이 -1이다.
- 각 근의 절댓값(modulus)은 1이어야 한다. 예를 들어 $\frac{(-1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})}{16}=\frac{16}{16}=1$이다.

네 무리식 표현이 모두 $(*)$와 $z^5=1$을 만족하고 $e^{\pm 2\pi i/5}$, $e^{\pm 4\pi i/5}$와 일치함을 수치로 확인하였다.

흔한 실수

- $z=1$을 제외하는 것을 잊는 실수. $z=1$은 $z^5=1$은 만족하지만 $(*)$는 만족하지 않으므로, $(*)$의 근은 다섯 개가 아니라 네 개이다.
- 근거 없이 무리식과 각을 짝짓는 실수. 어느 근이 $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$인지를 결정하는 것은 실수부의 부호이다.
- $z^2+z^{-2}=u^2$으로 써서 -2를 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

치환 $u=z+z^{-1}$은 모든 회문 다항식의 차수를 절반으로 줄인다. $\cos\frac{2\pi}{5}$를 2차방정식만 풀어서 얻을 수 있다는 것은 우연이 아니다. 가우스(Gauss)는 정n각형(regular n-gon)을 자와 컴퍼스(ruler and compass)로 작도할 수 있을 때, 그리고 그때에만 $\cos\frac{2\pi}{n}$을 제곱근만

으로 나타낼 수 있음을 보였다. 이 문제는 정오각형 작도의 바탕에 있는 대수이다. 전체 이야기는 대학 2학년 대수학 과정에서 배우는 갈루아 이론(Galois theory)이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 1의 거듭제곱근(roots of unity)을 아름다운 기하학적 관점에서 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.