풀이

STEP II 1996, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 1996, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q4

핵심 아이디어

제곱근 $\sqrt{1+x}$와 $\sqrt{1-x}$를 보면 $x = \cos t$로 치환(substitution)하고 싶어진다. 반각 공식(half-angle formulae)이 $1 \pm \cos t$를 완전제곱식으로 바꿔 주기 때문이다. 제곱근이 사라지고 나면 합 $\cos\theta + \sin\theta$는 하나의 코사인으로 합쳐지고, 분모 전체가 $1+\cos$(어떤 각)의 꼴이 되는데, 이것 역시 완전제곱식이다. 마지막 치환은 적분 구간을 원점 중심으로 옮겨서 분자가 $\cos 4u$가 되도록 하는데, 바로 이 때문에 항등식(identity)을 먼저 증명하는 것이다.

풀이

항등식

$c = \cos u$로 두고 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$을 두 번 쓰면

$$\begin{aligned}\cos 4u &= 2\cos^2 2u - 1 = 2\left(2c^2-1\right)^2 - 1 \\ &= 2\left(4c^4 - 4c^2 + 1\right) - 1 = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,\end{aligned}$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

첫 번째 치환

$x = \cos t$로 두면 $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$이다. x가 -1에서 1까지 변할 때 t는 π에서 0까지 감소한다. 음의 부호가 적분 구간의 위끝과 아래끝을 다시 뒤집으므로

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t} + \sqrt{1-\cos t} + 2}\,\mathrm{d}t.$$

를 얻는다. 이제 $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$이고 $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$이다.

생각해 보기 $\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}$는 정말 $\sqrt{2}\,|\cos\frac{t}{2}|$가 아니라 $\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$인가?

일반적으로는 절댓값이 되어야 하지만, 여기서는 $0 \le t \le \pi$이므로 $0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$이고, $\cos\frac{t}{2}$와 $\sin\frac{t}{2}$가 모두 음이 아니다. 바로 이 때문에 (예컨대 $[-\pi, 0]$이 아니라) $t \in [0, \pi]$를 택하는 것이 중요하다. 따라서

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos t} + \sqrt{1-\cos t} &= \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{t}{2} + \sin\tfrac{t}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\pi}{4} + \sin\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\tfrac{t}{2} - \tfrac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

이다. $v = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$로 두면 $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = 2v$이므로 분모는

$$2 + 2\cos 2v = 2(1 + \cos 2v) = 4\cos^2 v = 4\cos^2\left(\tfrac{t}{4} - \tfrac{\pi}{8}\right),$$

이고, 따라서

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4\cos^2\left(\frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

가 되어 원하는 식을 얻는다.

두 번째 치환

$u = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$로 두면 $t = 4u + \frac{\pi}{2}$이고 $\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$이다. 적분 구간의 끝 $t = 0$과 $t = \pi$는 각각 $u = -\frac{\pi}{8}$과 $u = \frac{\pi}{8}$이 된다. 분자는

$$\sin t = \sin\left(4u + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos 4u,$$

이고, 여기서 처음의 항등식이 쓰인다. 그러므로

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cos 4u}{4\cos^2 u}\cdot 4\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left(8\cos^2 u - 8 + \sec^2 u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

이다. 이 구간에서 $\cos u \ge \cos\frac{\pi}{8} > 0$이므로 $\cos^2 u$로 나누어도 문제가 없다. $8\cos^2 u = 4 + 4\cos 2u$를 이용하면 피적분함수(integrand)는 $4\cos 2u - 4 + \sec^2 u$이므로

$$I = \Big[\,2\sin 2u - 4u + \tan u\,\Big]_{-\pi/8}^{\pi/8}.$$

이다. 괄호 안의 식은 u에 대한 기함수(odd function)이므로, 그 값은 $\frac{\pi}{8}$에서의 값의 두 배이다.

$$\begin{aligned}I &= 2\left(2\sin\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2} + \tan\tfrac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 1\right)\\ &= 4\sqrt{2} - \pi - 2,\end{aligned}$$

여기서 $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$와 주어진 $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 수치로 계산하면 $4\sqrt{2} - \pi - 2 \approx 0.51526$이다. 심프슨 공식(Simpson's rule)을 x에 대한 원래 적분, t에 대한 적분, u에 대한 적분에 각각 적용하면 모두 0.515262를 얻는다.
- 크기 확인: $[-1, 1]$에서 합 $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$는 ($x = \pm 1$에서의) $\sqrt{2}$와 ($x = 0$에서의) 2 사이에 있으므로, 피적분함수는 $\frac{1}{4}$와 $\frac{1}{2+\sqrt{2}} \approx 0.293$ 사이에 있다. 따라서 $0.5 \leq I \leq 0.586$이고, 0.515는 이 범위에 들어맞는다.
- $t = 0$에서 분모 $4\cos^2(-\frac{\pi}{8})$는 $\sqrt{2} + 0 + 2$와 같아야 한다. 실제로 $4\cos^2\frac{\pi}{8} = 2(1 + \cos\frac{\pi}{4}) = 2 + \sqrt{2}$이다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$의 음의 부호를 빠뜨리거나 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸는 것을 잊어서 $-I$를 얻는 것.
- $[0, \pi]$에서 $\cos\frac{t}{2} \geq 0$임을 언급하지 않고 $\sqrt{1+\cos t} = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$라고 쓰는 것.
- $\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$의 인수 4를 빠뜨리는 것. 이 4는 분모의 4와 정확히 약분된다.

STEP 너머

제곱근을 "유리화"하는 $x = \cos t$ 같은 치환은 더 일반적인 사실의 특수한 경우이다. x와 $\sqrt{1-x^2}$(또는 이와 비슷한 이차 무리식)의 유리함수(rational function)인 피적분함수는 삼각함수 치환이나 $t = \tan\frac{\theta}{2}$ 치환으로 언제나 유리함수로 바꿀 수 있고, 그러면 초등함수(elementary function)로 적분할 수 있다. 대학에서는 이것의 체계적인 형태와 함께 그 한계도 배운다. 삼차나 사차 무리식이 나오면 타원적분(elliptic integral)이 생기는데, 이것은 초등함수로 나타낼 수 없다. 이런 유형의 문제를 더 많이 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.