풀이

STEP II 1996, 문제 3

순수수학 • 수학적 귀납법을 이용한 피보나치 항등식

STEP II 1996, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것이 점화식(recurrence)에서 나오므로 귀납법(induction)이 자연스러운 도구이다. 곱 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$에 대해서는 연속한 값을 비교하는 것이 요령이다. 점화식을 한 번 쓰면 각 값이 바로 앞 값에 마이너스를 붙인 것이 된다. 덧셈 공식(addition formula)에 대해서는 k에 대한 귀납법을 쓰되, 귀납 가정(inductive hypothesis)이 모든 n에 대하여 한꺼번에 성립하도록 하는 것이 깔끔한 방법이다. 그러면 n 대신 $n+1$을 넣어 가정을 적용할 수 있다.

풀이

처음 몇 개의 값

$n = 1, 2, 3$일 때 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$을 쓰면

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \qquad F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \qquad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$

이므로 요구된 대로이다. 계속하면

$$F_5 = 3 + 2 = 5, \qquad F_6 = 5 + 3 = 8, \qquad F_7 = 8 + 5 = 13.$$

곱 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

$n \geq 1$에 대하여 $C_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$이라 하자. 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6
$F_{n+1}F_{n-1}$	$1 \cdot 0$	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 1$	$5 \cdot 2$	$8 \cdot 3$	$13 \cdot 5$
F_n^2	1	1	4	9	25	64
C_n	-1	1	-1	1	-1	1

값의 부호가 번갈아 바뀌므로 다음과 같이 추측한다.

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{모든 정수} n \geq 1.$$

생각해 보기 점화식만 써서 C_n에서 C_{n+1}로 어떻게 넘어갈 수 있을까?

C_{n+1}에서 첨자가 큰 쪽을 전개한다. $n \geq 1$일 때

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 && \text{(점화식: } F_{n+2}) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} && \text{(이유: } F_{n+1} - F_n = F_{n-1}\text{, 단} n \geq 1) \\ &= -C_n. \end{aligned}$$

이제 귀납법은 바로 끝난다. 기저 단계(base case)는 $C_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$이다. 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $C_n = (-1)^n$이면 $C_{n+1} = -C_n = (-1)^{n+1}$이다. 따라서 귀납법에 의하여

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{모든 정수} n \geq 1.$$

덧셈 공식

각 양의 정수 k에 대하여 $P(k)$를 다음 명제라 하자.

$$F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{모든 양의 정수} n.$$

기저 단계 $k = 1$. 우변은 $F_1F_{n+1} + F_0F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 0 = F_{n+1}$이고, 이는 좌변과 같다. 따라서 $P(1)$이 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하고, n을 임의의 양의 정수라 하자.

생각해 보기 가정은 F_{n+k}에 관한 것인데, 우리에게 필요한 것은 F_{n+k+1}이다. 가정에 어떤 n을 넣어야 할까?

$P(k)$는 모든 양의 정수에 대하여 성립하므로, n 대신 $n+1$을 넣어 적용할 수 있다. $(n+1)+k = n+(k+1)$이기 때문이다.

$$\begin{aligned} F_{n+(k+1)} = F_{(n+1)+k} &= F_kF_{n+2} + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(적용: } P(k)\text{, 대입: } n+1) \\ &= F_k(F_{n+1} + F_n) + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(점화식: } F_{n+2}) \\ &= (F_k + F_{k-1})F_{n+1} + F_kF_n \\ &= F_{k+1}F_{n+1} + F_kF_n && \text{(점화식, } k \geq 1). \end{aligned}$$

이것이 바로 이 n에 대한 $P(k+1)$이고, n은 임의였다. 따라서 귀납법에 의하여 $P(k)$는 모든 양의 정수 k에 대하여 성립한다. 즉,

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \qquad \text{모든 양의 정수} n, k,$$

이므로 요구된 대로이다.

(다른 방법으로, n을 고정하고 k에 대한 2단계 귀납법을 쓸 수도 있다. $k = 1$과 $k = 2$를 확인한 다음, $k-1$과 k에 대한 식을 더하면 된다. 두 방법 모두 괜찮지만, 위의 방법은 기저 단계가 하나만 필요하다.)

검산

- $n = 6$일 때 카시니(Cassini) 항등식: $F_7 F_5 - F_6^2 = 13 \cdot 5 - 64 = 1 = (-1)^6$.
- $n = 3, k = 4$일 때 덧셈 공식: $F_7 = 13$이고 $F_4 F_4 + F_3 F_3 = 9 + 4 = 13$.
- $k = n$으로 놓으면 $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$이다. $n = 3$이면 $F_6 = 2 \cdot (3+1) = 8$이다.

컴퓨터로 곱 공식은 $1 \le n < 150$에 대하여, 덧셈 공식은 모든 $1 \le n, k < 90$에 대하여 확인하였다.

흔한 실수

- 부호를 거꾸로 쓰는 것: $C_1 = -1$이므로 답은 $(-1)^{n+1}$이 아니라 $(-1)^n$이다.
- 덧셈 공식에서 n을 고정한 채 k에 대한 귀납법을 쓰고는 가정을 $n+1$에서 사용하는 것: 이는 가정이 모든 n에 대하여 진술되어 있을 때에만 정당하다.
- $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$을 쓰면서 이것이 $n \ge 1$을 필요로 한다는 점을 밝히지 않는 것.

STEP 너머

두 항등식은 모두 하나의 행렬(matrix) 사실이 드리운 그림자이다. 바로 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$이다. 행렬식(determinant)을 취하면 곱 공식(카시니 항등식(Cassini's identity))이 곧바로 나오고, $M^{n+k} = M^k M^n$으로 쓰면 덧셈 공식이 나온다. 카시니 항등식은 연속한 피보나치 수(Fibonacci numbers)가 서로소(coprime)임도 보여 주며, 덧셈 공식과 함께 쓰면 $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$이라는 놀라운 결과를 증명할 수 있다. 이런 종류의 정수론을 탐구하기에는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 좋은 출발점이며,

Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 고윳값(eigenvalue)을 통해 피보나치 수를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.